

$f(x) = \tan^{-1} x$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求める

また $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=2K, K=0,1,2,3,\dots) \\ (-1)^K (2K)! & (n=2K+1, K=0,1,2,3,\dots) \end{cases}$ を示す。

$f(0) = 0$ は明らか。

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ より $f'(0) = 1$

よって $(1+x^2)f(x) = 1$ より

この式の両辺を n 回微分して、ライプニッツの公式を用いれば

$$\frac{d^n}{dx^n} \{(1+x^2)f(x)\} = (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

よって $\{f^{(n)}(0)\}$ に関する漸化式が得られる。

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0) \quad (n=1,2,3,\dots)$

よって $f^{(2n)}(0) = 0, f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)! \quad (n=0,1,2,\dots)$ より示された。

この結果より

$f(x) = \tan^{-1} x$ の $x=0$ のまわりにおけるテイラー展開は

$$\tan^{-1} x = \sum_{h=0}^{\infty} f^{(h)}(0) \frac{x^h}{h!}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} f^{(2h+1)}(0) \frac{x^{(2h+1)}}{(2h+1)!} \quad (f^{(2n)}(0) = 0 \text{ より})$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h (2h)! \frac{x^{(2h+1)}}{(2h+1)!} \quad (f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)! \text{ より})$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{(2h+1)}}{2h+1}$$

教科書にのっています。