

(テイラーの定理)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, C^n 級 ($n \geq 1$)

$$a \in I, R_n(x) := f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \text{ とおく.}$$

剰余項 $\rightarrow$ ($x \in I$)

任意の $x_0 > a$ ($x_0 < a$) に対して、ある $\xi \in (a, x_0)$ が存在して、

$$R_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x_0 - a)^n \text{ とかける.}$$

$\leftarrow a, x_0$ に依存する.

(注) P.80 定理 6.7 では $x_0 > a$ と $x_0 < a$ の場合を同時に書いている.

(証明) 平均値の定理をくり返し使う. //

(定義) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, R_n : テイラーの定理と同じ仮定. (ただし f は C^∞ 級)

$x \in I$ において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ が成り立つとき、

f は $x \in I$ においてテイラー展開可能という.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k \right| = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k$$

このとき、 $f(x)$ の級数による表示

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-a)^n$$

を f の x におけるテイラー展開という. ($x=0$ におけるテイラー展開をマクローリ展開という.)

(注) すべての C^∞ 級関数がテイラー展開可能というわけではない.

(P.82~83)

(例). $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

$\Rightarrow f$ は テイラー展開可能 (マクローリ展開は、 $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ となる)

$e^x, \cos x, \sinh x$ は 任意の $x \in \mathbb{R}$ で テイラー展開可能である.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$