

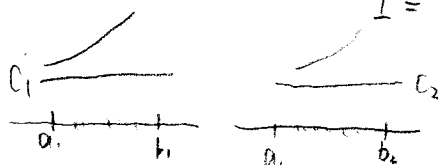
(注) 上の定理より、前回までに述べた定理のいくつかで、

「 f は狭義単調増加 (減少)」 という条件を省略することになる。 ($f'(x) > 0$ ($x \in I$) という条件と重複する)

(注) I が区間でない場合は、結論を変更が必要がある。 $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$

$$I = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$$

$$f' = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} c_1 & (a_1 \leq x \leq b_1) \\ c_2 & (a_2 \leq x \leq b_2) \end{cases}$$



(ロピタルの定理)

$$\left\{ \begin{array}{l} f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 微分可能, } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 微分可能, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する}$$

$$x=a \text{ の近くで, } g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ も存在して, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が成り立つ.}$$

$$(例) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(注) 11.3.13 設定を 加えても 成り立つ. (p.74 参照.)

$$① [c, a) \text{ で } \lim_{x \rightarrow a} \text{ を考える.}$$

$$② \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ (or } -\infty) \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \text{ (or } -\infty) \text{ という場合.}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \text{ (or } -\infty) \text{ という場合.}$$

(ロピタルの定理の証明)

$\eta \in (a, b)$ を ひとつえらんで 固定する.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\eta) := \lim_{x \rightarrow \eta} f(x) (=0) \\ g(\eta) := \lim_{x \rightarrow \eta} g(x) (=0) \end{array} \right. \text{ と定める.}$$

f と g は $[a, \eta]$ で 連続 であるとしてよい.

コーシーの平均値の定理より、 $(f, g, [a, \eta])$ あり $\xi_\eta \in (a, \eta)$ が存在して、次が成り立つ.

$$\frac{f(\eta)}{g(\eta)} = \frac{f(\eta) - f(a)}{g(\eta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ が存在する (仮定)}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow a} \xi_\eta = a \quad (|\xi_\eta - a| < |\eta - a|)$$

5月 は (この補題)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\eta \rightarrow a} \frac{f(\eta)}{g(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow a} \frac{f'(\xi_\eta)}{g'(\xi_\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\eta \rightarrow a} \frac{f(\eta)}{g(\eta)}$$