

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^5}$$

$$(i) \text{ ように } \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots)}{x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^5} = 0 \text{ ように}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}}{x^5} = 0 \text{ を考える}$$

$$\textcircled{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!x^2} - \frac{1}{5!} \right) = \infty$$

以上より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^5} = \infty$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan x)'' = 2 \tan x \times \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$(\tan x)''' = 6 \tan^2 x + 8 \tan^2 x + 2$$

より

$$\tan x = 0 + (1+0)x + \frac{1}{2!} \times 0 \times x^2 + \frac{1}{3!} (0+0+2)x^3 + \dots$$

なので

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \frac{2}{3!}x^3 + \dots) - x}{x^3}$$

この部分のxの次数は4以上より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots}{x^4} = 0 \text{ なので}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \dots}{x^3} = \frac{1}{3}$$