

(2) $\cos^2 x$

$$(\cos^2 x)' = -\sin 2x \quad (\cos^2 x)'' = -2\cos 2x$$

$$(\cos^2 x)''' = 4\sin 2x \quad (\cos^2 x)^{(4)} = 8\cos 2x \quad \dots \text{よ!}$$

$$\cos^2 x = \cos^2 0 - \sin 0 \times x - \frac{1}{2!} \times 2\cos 0 + \dots$$

$$= 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} (-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + 1$$

成り立つのはすべての x (iii) (1) (i) よ! $-1 < x < 1 \wedge x \neq 0$ ならば

$$e^x = 1 + x + \dots \quad \text{なので}$$

$$e^x > 1 + x$$

$$x = -x \text{ を代入すると}$$

$$e^{-x} > 1 - x$$

$$\Leftrightarrow e^x < \frac{1}{1-x}$$

以上より

$$1+x < e^x < \frac{1}{1-x}$$

(2) (1) よ! $1+x < e^x$ なので $e > 1$ も考慮すると

$$\log(1+x) < x \quad (x > -1 \wedge x \neq 0 \text{ のとき})$$

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} \quad (\log(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \text{よ!}$$

$$\log(1+x)$$

$$= \log 1 + x \frac{1}{1+x} + \int_0^x \frac{-1}{(1+b)^2} (x-b) db$$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+b} \right)' (x-b) db > x \left[\frac{1}{1+b} \right]_0^x = \frac{x}{1+x} - x$$

$$\text{よって } \log(1+x) > 1+x + \frac{x}{1+x} - x = \frac{x}{1+x} + 1 > \frac{x}{1+x}$$

以上より $x > -1 \wedge x \neq 0$ ならば

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad \text{が成り立つ}$$