

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)'' = -\cos x$$

$$(\cos x)''' = \sin x$$

$$(\cos x)^{(4)} = \cos x \quad \text{etc.}$$

$$\cos x = \cos 0 - \sin 0 \cdot x + \frac{\cos 0}{2!} x^2 + \frac{\sin 0}{3!} x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \times (-1)^k \times x^{2k}$$

① に $x = i\theta$ を代入する。

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i\theta)^k$$

②, ③ に $x = \theta$ を代入して ② $\times i$ + ③ とする。

$$\cos \theta + i \sin \theta = i \sin \theta + \cos \theta$$

$$= i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (i\theta)^k$$

$$\therefore e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{が成り立つ} //$$

(ii)(1). $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ とする。

真数条件より

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} 1-x < 0 \\ 1+x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$f'(x) = (1+x)^{-1} + (1-x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3} + (1-x)^{-3}$$

よって

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$= 0 + 2x + 0 + \frac{4}{3!}x^3 + 0 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}$$

これが成り立つのは $-1 < x < 1$ //