

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x(a^x - 1)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^x - 1) = \infty \times (-1) = -\infty$$

(ii) $a = 1$ のとき

$$x(a^x - 1) = x \times 0 = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} x(a^x - 1) = 0$$

(iii) $a > 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^x - 1) = \infty$$

$$(5) \lim_{x \downarrow 0} \sin x \log x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

より、ロピタルの定理が使えるので

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \times \cos x}$$

$$= \lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \times \tan x \right) = -0 \times 1 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \downarrow 0} x^{\sin x} = 1$$

問題 3

(i) $(e^x)^{(n)} = e^x$ より

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{1}{2!} e^0 x^2 + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{①}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\sin x)'' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = -\cos x \quad (\sin x)^{(4)} = \sin x \quad \text{②}$$

$$\sin x = \sin 0 + \cos 0 \times x - \frac{\sin 0}{2!} x^2 - \frac{\cos 0}{3!} x^3 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1} \quad \text{③}$$