

電磁気学中間試験 2013 2013/11/15 実施

※1：文末に（単位）と書いてある問題はすべて単位を付けて答えること

※2：特にことわりがない限り、すべて真空中での実験と考えて解答せよ

※3：以下の物理定数は文中における記載の有無に関わらず使える

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{クーロンの法則における比例定数 } k \\ \text{重力加速度 } g \end{array} \right.$$

問1 以下の物理量を表すのに適当な単位を答えなさい。なお、常用で使われる単位が複数ある場合、そのうちの一つを答えればよい。（5点）

(A)電荷 Q

(B)電場 E

(C)電位（電位差） V

(D)コンデンサの電気容量（接頭語は付けなくてよい）

(E)エネルギー

問2 一様な電場内で電場の方向に $2[\text{m}]$ 離れた2点間の電位差が $10[\text{V}]$ だった。このとき以下の問いに答えなさい（4点）

(1)電場の強さを求めなさい（単位）

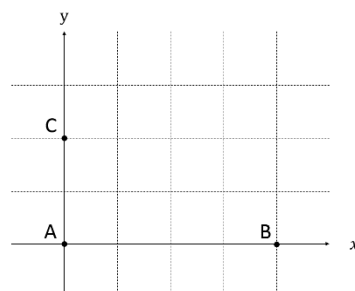
(2)この電場に置かれた $+1[\text{C}]$ の電荷が受ける電気力の大きさを求めなさい（単位）

問3 2枚の極板（導体の板）がある。一方の極板で静止していた点電荷（質量 m , 電荷 $+Q$ ）が電位差 V の極板間を電気力のみを受けて移動したとする。反対側の極板に到達する直前の点電荷の速度を求めなさい（2点）

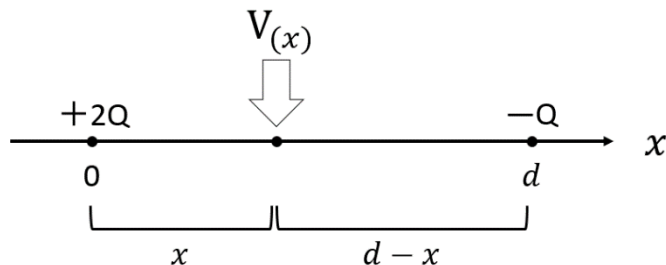
問4 電気容量 $1[\mu\text{F}]$ のコンデンサに電圧 $100[\text{V}]$ を加えた。このとき、コンデンサに蓄えられる電荷を求めなさい（単位）（2点）

問5 あるコンデンサに $20[\text{V}]$ の電位差を加えたところ $10^{-4}[\text{C}]$ の電荷が蓄えられた。このコンデンサの電気容量を求めなさい（単位）（2点）

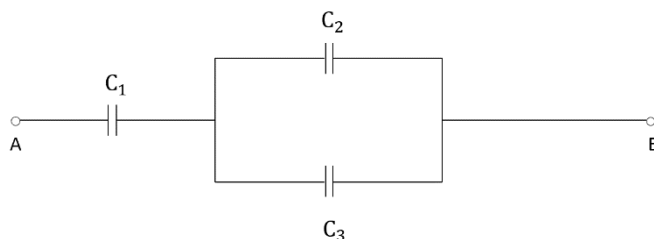
問6 右図に示すように xy 平面上に点電荷 A, B, C を置いた。 A, B, C の電荷がそれぞれ $+4[\text{C}], +12[\text{C}], -4[\text{C}]$ のとき、点電荷 A に働く電気力の大きさを求めなさい。図中の目盛りは $1[\text{m}]$ ごとに引かれている。クーロンの法則における比例定数を $k = 9 \times 10^9 [\text{Nm}^2/\text{C}^2]$ として計算しなさい（単位）（10点）



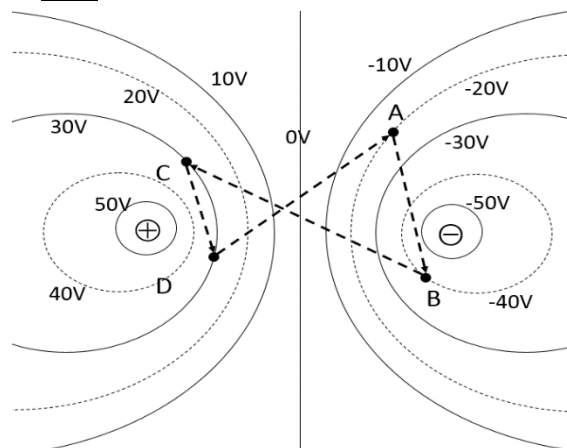
- 問7 下図のように x 軸上の2点($x=0, d$)に2つの点電荷 $+2Q, -Q$ を配置した。このとき、 x 軸上の点電荷に挟まれた領域(すなわち、 $0 < x < d$ の範囲)の任意の点における電位 $V(x)$ を求めよ(10点)



- 問8 電気容量がそれぞれ C_1, C_2, C_3 の3つのコンデンサを下図のように接続した。このときA-B間の合成容量を求めなさい(10点)



- 問9 下図のような等電位線を持つ電場において $+5[C]$ の電荷を「点A→点B→点C→点D→点A」という経路を破線の矢印に沿って一周させたとする。このとき以下の問いに答えなさい。(単位) (9点)

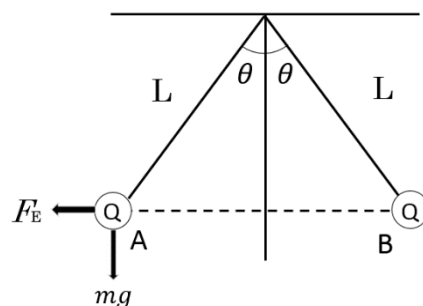


- (1)各区間において電場がした仕事($W_{A \rightarrow B}, W_{B \rightarrow C}, W_{C \rightarrow D}, W_{D \rightarrow A}$)を求めなさい。

(注： $W_{A \rightarrow B}$ の値は正である)

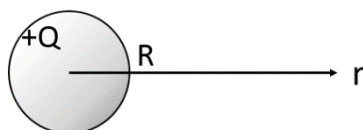
- (2)点Aを出発して、再び点Aに戻ってくるまでに電場がした仕事の総和を求めなさい。

問 1 0 質量 m の金属小球 A, B が右図のように天井から長さ L の糸でつり下げられている。A, B に等しい正電荷 Q を与えたところ、2 本の糸はそれぞれ鉛直線と θ の角をなして静止した。このとき、以下の問いに答えなさい (9 点)

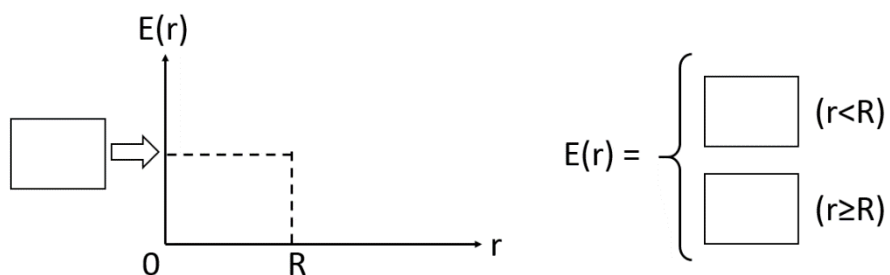


- (1) 金属小球 A に作用するクーロン力 (電気力) F_E を m, g, θ を用いて表しなさい。
- (2) 金属小球 A に作用するクーロン力 (電気力) F_E を k, L, Q, θ を用いて表しなさい。
- (3) 金属小球に与えられた電荷 Q を k, m, g, L, θ を用いて表しなさい。

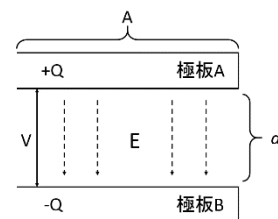
問 1 1 半径 R の導体球に正電荷 $+Q$ を置いた。このとき以下の問いに答えなさい (10 点)



- (1) 導体球の中心からの距離 r における電場 $E(r)$ をもとめ空欄に記入しなさい (場合分けすること)。また電場 $E(r)$ を以下のグラフに図示し、空欄に適当な電場の大きさを記入しなさい。

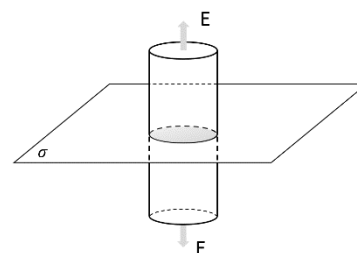


問 1 2 右図のように、極板の面積が A 、極板の間隔が d の平行板コンデンサを考える。いま、各極板に $+Q$ 、 $-Q$ の電荷が蓄えられている。このとき以下の問いに、 A 、 d 、 Q 、 k 、及び、問題文中で与えられた記号を使って答えなさい（7 点）

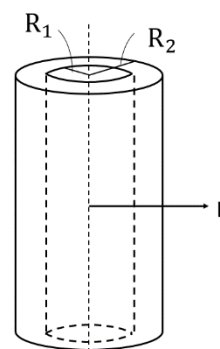


- (1) 極板 A の電荷密度 σ を求めなさい
- (2) 極板間の電場の強さ E を Q を用いて求めなさい
- (3) 極板 A と極板 B の電位差 V を Q を用いて求めなさい
- (4) このコンデンサの電気容量 C_0 を求めなさい
- (5) 以下の作業を行ったところコンデンサの電気容量が変化した。変化後の電気容量 C' を C_0 を用いて表しなさい。
 - (a) 極板の間隔を d から $2d$ に広げる
 - (b) 極板の面積を A から $2A$ に広げる
 - (c) 極板 A と極板 B の間を比誘電率 ϵ_r の誘電体で完全に満たす

問 1 3 無限に広い平面上に電荷が一様な面密度 σ で分布している。このとき平面の両側に、平面に垂直な一様電場 E が生じる。断面積 A の円柱を閉曲面としたガウスの法則を考えることにより、電場 E の大きさを求めなさい（10 点）



問 1 4 半径がそれぞれ R_1 、 R_2 の無限に長い 2 つの円筒で構成されるコンデンサ（右図）について、以下の問いに答えなさい。なお、2 つの円筒の軸は完全に一致しているものとする（10 点）



- (1) 半径 R_1 、 R_2 の円筒の単位長さあたりに蓄えられている電荷をそれぞれ $+Q$ 、 $-Q$ とすると、軸からの距離 r ($R_1 < r < R_2$) における電場の大きさは $E(r) = \frac{2kQ}{r}$ と表せることを示しなさい。

- (2) このコンデンサの単位長さあたりの電気容量を求めなさい。

解答

問 1 : 電磁気学で用いられる単位

(A) C (B) N/C または V/m (C) V (D) F (E) J

問 2 : 電場・電位・クーロン力

$$(1) E = \frac{V}{d} = \frac{10}{2} = 5 \text{ [V/m]} \quad (\text{別解 : } 5 \text{ [N/C]})$$

$$(2) F = qE = 1 \cdot 5 = 5 \text{ [N]}$$

問 3 : エネルギー保存則

反対の極板に到達する直前の点電荷の速度を v とすると、
エネルギー保存則より、

$$QV = \frac{1}{2} mv^2 \quad \therefore v = \sqrt{\frac{2QV}{m}}$$

問 4 : コンデンサ

$$Q = CV = (1 \times 10^{-6}) \times 100 = 1 \times 10^{-4} \text{ [C]}$$

問 5 : コンデンサ

$$Q = CV \text{ より、} C = \frac{Q}{V} = \frac{10^{-4}}{20} = 5 \times 10^{-6} \text{ [F]} \quad (\text{別解 : } 5 \text{ } [\mu\text{F}])$$

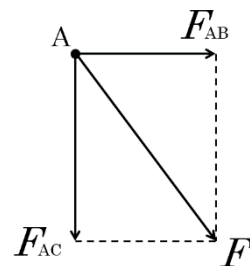
問 6 : 点電荷

クーロンの法則より、

$$F_{AB} = k \frac{q_A q_B}{r^2} = k \cdot \frac{4 \cdot 12}{4^2} = 3k$$

$$F_{AC} = k \frac{q_A q_C}{r^2} = k \cdot \frac{4 \cdot (-4)}{2^2} = -4k$$

$$\therefore F = \sqrt{(3k)^2 + (-4k)^2} = 5k = 5 \times (9 \times 10^9) = 4.5 \times 10^{10} \text{ [N]}$$



問 7 : 電位

$$V(x) = \frac{2kQ}{x} + \frac{-kQ}{d-x} = kQ \frac{2d-3x}{x(d-x)}$$

問 8 : コンデンサの接続

C_2 と C_3 の合成容量 C_{23} は、 $C_{23} = C_2 + C_3$

C_1 と C_{23} の合成容量 C_{123} は、 $\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)}$

よって A-B 間の合成容量 $C_{123} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$

問 9 : 電場のする仕事

(1) $W_{A \rightarrow B} = Q(V_A - V_B) = 5\{-20 - (-40)\} = 100 \text{ [J]}$

$W_{B \rightarrow C} = Q(V_B - V_C) = 5\{-40 - 30\} = -350 \text{ [J]}$

$W_{C \rightarrow D} = Q(V_C - V_D) = 0 \text{ [J]}$

$W_{D \rightarrow A} = Q(V_D - V_A) = 5\{30 - (-20)\} = 250 \text{ [J]}$

(2) (1)の結果より、

$W_{\text{全}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} = 100 + (-350) + 0 + 250 = 0 \text{ [J]}$

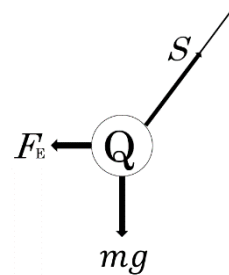
問 10 : クーロン力

(1) 糸の張力を S とすると、

鉛直方向の力のつり合いから、 $mg = S \cos \theta \cdots \textcircled{1}$

水平方向の力のつり合いから、 $F_E = S \sin \theta \cdots \textcircled{2}$

①、②より、 $F_E = mg \tan \theta$



(2) AB 間の距離 $r = 2L \sin \theta$ であるから、クーロンの法則より、

$$F_E = \frac{kQ^2}{(2L \sin \theta)^2}$$

(3) (1)、(2)より、

$$mg \tan \theta = \frac{kQ^2}{(2L \sin \theta)^2}$$

$Q > 0$ に注意してこれを解くと、 $Q = 2L \sin \theta \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k}}$

問 1 1 : 導体球の電位・電場

(1) (i) $0 < r < R$

導体球の内部であるから、 $E_{(r)} = 0$

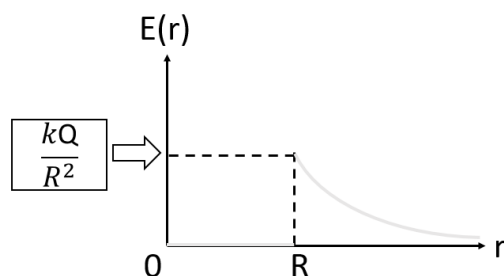
(ii) $r \geq R$

$$\Phi_E = E_{(r)} \cdot A = 4\pi r^2 \cdot E_{(r)}$$

また、ガウスの法則より、 $\Phi_E = 4\pi kQ$

$$\therefore E_{(r)} = \frac{kQ}{r^2}$$

したがって、グラフは図のようになる。



(2) (i) $0 < r < R$

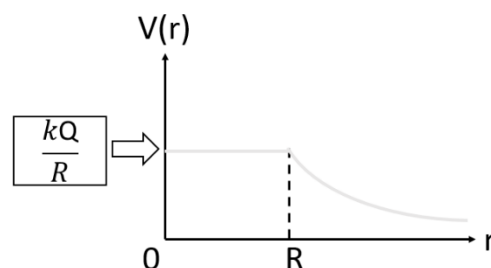
電場が 0 の導体球の内部では電位は等しく、

$$V_{(r)} = V_{(R)} = \int_R^\infty E_{(r)} dr = \int_R^\infty \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{R}$$

(ii) $r \geq R$

$$V_{(r)} = \int_r^\infty E_{(r)} dr = \int_r^\infty \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{r}$$

したがって、グラフは図のようになる。



問 1 2 : コンデンサ

$$(1) \sigma = \frac{Q}{A} \quad (2) E = 4\pi k\sigma = \frac{4\pi kQ}{A} \quad (3) V = Ed = \frac{4\pi kdQ}{A}$$

$$(4) (3) \text{より、} Q = \frac{1}{4\pi k} \cdot \frac{A}{d} \cdot V$$

$$Q = C_0 V \text{ であるから、} C_0 = \frac{1}{4\pi k} \cdot \frac{A}{d} \quad \dots (*)$$

$$(5) (a) (*) \text{より、} C' = \frac{C_0}{2} \quad (b) (*) \text{より、} C' = 2 C_0$$

(c) 比誘電率 ϵ_r の誘電体を挿入すると、 Q は変化せずに V が $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍になるから C' は C_0 の ϵ_r 倍になる。よって $C' = \epsilon_r C_0$

問 1 3 : 電場のガウスの法則

$$\Phi_E = 2EA$$

また、ガウスの法則より、 $\Phi_E = 4\pi k\sigma A$

$$\therefore E = 2\pi k\sigma$$

問 1 4 : 電場のガウスの法則・コンデンサ

$$(1) \Phi_E = EA = 2\pi rE$$

また、ガウスの法則より、 $\Phi_E = 4\pi kQ$

$$\text{よって } E_{(r)} = \frac{4\pi kQ}{2\pi r} = \frac{2kQ}{r}$$

$$(2) V = \int_{R_1}^{R_2} E_{(r)} dr = 2kQ \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$= 2kQ [\log r]_{R_1}^{R_2}$$

$$= 2kQ \log \frac{R_2}{R_1}$$

電荷 Q を V の関数として書き直すと、

$$Q = \left(2k \log \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} V = CV \text{ となるから、}$$

このコンデンサの単位長さあたりの電気容量 C は $C = \left(2k \log \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}$