

定義のまとめ

レポート 1 : (1) 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束することの定義を書け。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $\pm\infty$ に発散することの定義を書け。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が上 (下) に有界であることの定義を書け。

(4) 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を書け。

(5) 収束する数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ。

レポート 2 : (1) 関数 $f(x)$ に対し, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であることの定義を書け。

また, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ であることの定義を書け。

(2) 関数 $f(x)$ が点 a で連続であることの定義を書け。

(3) 関数 $f(x)$ が $x = c$ で微分可能であることの定義を書け。

レポート 3 : (1) $\mathbb{R}^2$ 内の点列 $\{p_n = (a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $p = (a, b)$ に収束することの定義を書け。

(2) 関数 $f(x, y)$ に対し, $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \alpha$ であることの定義を書け。

(3) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で連続であることの定義を書け。

(4) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で (全) 微分可能であることの定義を書け。また, 点 (a, b) で x に関して (y に関して) 偏微分可能であることの定義を書け。

解答

レポート 1 : (1) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは、任意の正数 ε に対して、ある自然数 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となること。

(2) $\{a_n\}$ が ∞ ($-\infty$) に発散するとは、任意の正数 M に対して、ある自然数 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \implies a_n > M \quad (a_n < -M)$$

となること。

(3) $\{a_n\}$ が上 (下) に有界であるとは、ある実数 M_1 (M_2) が存在して

$$a_n \leq M_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(a_n \geq M_2)$$

となること。

(4) $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは、任意の正数 ε に対して、ある自然数 n_0 が存在して、

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon$$

となること。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とする。

このとき、任意の正数 ε に対して、ある自然数 n_0 が存在して、

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - \alpha) - (a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

よって、 $\{a_n\}$ はコーシー列である。

レポート 2 : (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ($x \in I$) とは、

任意の正数 ε に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta \quad (x \in I) \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となること。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($-\infty$) とは

任意の正数 M に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M \quad (f(x) < -M)$$

となること。

(2) $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となること。

(3) $f(x)$ が $x = c$ で微分可能であるとは、

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

が収束すること。

レポート 3 : (1) 点列 $\{p_n = (a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $p = (a, b)$ に収束するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| = 0$$

が成り立つこと。

(2) 関数 f は集合 U 上で定義されているとする。(以下これは省略) このとき,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha \quad ((x, y) \in U)$$

とは任意の正数 ε に対して, $\delta > 0$ が存在して,

$$0 < |(x, y) - (a, b)| \quad ((x, y) \in U) < \delta \implies |f(x, y) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つこと。

(3) f が点 (a, b) で連続であるとは,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成り立つこと。

(4) f が点 (a, b) で微分可能であるとは,

$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + o(1)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

ただし, $o(1) \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (a, b))$

となる定数 α, β が存在すること。

また, f が (a, b) で x (y) に関して偏微分可能であるとは, f が x (y) の関数として, $x = a$ ($y = b$) で微分可能であること。