7月9日提出レポート解答例

(1) 正の実数 ε をどんなに小さくしても、ある自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して
$n, m > N(\varepsilon)$ $(n, m \in \mathbb{N},\ n > m)$ のとき $|a_n - a_m| < \varepsilon$
となることを示す。

(4/17のノートより)

$$
\begin{aligned}
a_n - a_m &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^3} \\
&= \frac{1}{(m+1)^3} + \frac{1}{(m+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3} + \frac{1}{n^3} \\
&\leq \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \\
&\leq \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\
&< \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

$\varepsilon\ (>0)$ に対して $N(\varepsilon)$ を $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$ となるように選ぶと、
$n, m > N(\varepsilon)$ ならば、$|a_n - a_m| < \frac{1}{m} < \varepsilon$ である。
よって与えられた数列はコーシー列である。

(2) 関数 $f(x)$ は $I \in \mathbb{R}$ において連続であるから次のことがいえる。
正の実数 ε をどんなに小さくしても、ある正の実数 δ が存在して、
$|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となるとき、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
が成り立つ。

(連続条件です)

ここで、$a \in I$ において $f(a) > 0$ なので $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) > 0$
より、x が十分 a に近いとき $f(x) > 0$ となる。よって題意は示せた。

(3) $f(x) = 1$、$f(x) = |x| + |x-1|$、$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$、$x = 1$ など

(4) $x \to +\infty$ のとき、$\log x \to +\infty$、$x^a \to +\infty$ なので、ロピタルの定理より

$$
\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)'}{(x^a)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a x^a} = 0
$$

よって $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^a}$ は存在する。

(5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ より、

$f^{(1)}(x) = \{(x+1)^{-\frac{1}{2}}\}' = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$、$f^{(2)}(x) = \left\{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\right\}' = \frac{3}{2^2}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$

$f^{(3)}(x) = \left\{\frac{3}{2^2}(x+1)^{-\frac{5}{2}}\right\}' = -\frac{3 \cdot 5}{2^3}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$、$f^{(4)}(x) = \left\{-\frac{3 \cdot 5}{2^3}(x+1)^{-\frac{7}{2}}\right\}' = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4}(x+1)^{-\frac{9}{2}}$、

ここで、
$$
f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n}(x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}(x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!}(x+1)^{-\frac{2n+1}{2}} \quad \cdots ①
$$
と予想できるので、これを数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき $f^{(1)}(x) = (-1)\frac{2!}{2^2 \cdot 1!}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}$ となり成り立つ。

$n = k\ (k \geq 1)$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left\{(-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot k!}(x+1)^{-\frac{2k+1}{2}}\right\}' = (-1)^{k+1} \frac{(2k)!\,(2k+1)}{2^{2k+1} \cdot k!}(x+1)^{-\frac{2k+3}{2}} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(2k)!\,(2k+1)}{2^{2k+1} \cdot k!} \cdot \frac{2k+2}{2k+2}(x+1)^{-\frac{2k+3}{2}} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2} \cdot (k+1)!}(x+1)^{-\frac{2k+3}{2}}
\end{aligned}
$$

よって、$n = k+1$ のときも ① は成り立つので、① はすべての自然数について成り立つ。

したがって、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x+1}} &= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} x^n
\end{aligned}
$$