

09 後半組 (前期月)

6. (i) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の証明
このとき

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \text{ より}$$

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{①}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \text{ より}$$

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \text{②}$$

①、②より

$$-\delta < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$\therefore |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

これは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ を示す。

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ の証明}$$

このとき

$$-\delta < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \text{ が成立している}$$

これは

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

を同時に満たしているから。

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \text{ といえる。}$$

⑥ (別解)

条件 P, Q を次のように定める。

$$P: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

$$Q: \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

$P \Rightarrow Q$ の証明

P のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$

が決まり、 $x \neq a$ を満たす x について、

次が成り立つ。

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

ゆえに、

$$\left\{ \begin{array}{l} x > a, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \\ x < a, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\text{よって、} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \text{ から } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha.$$

ゆえに Q が成り立つ。

$Q \Rightarrow P$ の証明

Q のとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta, \delta' > 0$

が決まり、次が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} x > a, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \\ x < a, 0 < a - x < \delta' \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\therefore \delta'' = \min(\delta, \delta') \text{ とおくと、}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta < \delta' \text{ に対しては } \delta \\ \delta' < \delta \text{ に対しては } \delta' \end{array} \right.$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta'' > 0$ が決まり、
次が成り立つ。

$$x \neq a, 0 < |x - a| < \delta'' \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$\text{よって、} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

ゆえに、P が成り立つ。

以上から、 $P \Leftrightarrow Q$ □