

4. $f(x)$: 適切な範囲で定義されている微分可能な関数

$$f'(x) \leq a(x)f(x) \Rightarrow e^{-\int a(x)dx} f(x) \text{ は広義単調減少} \quad - (1)$$

$$\text{もし} f'(x) \leq a(x)f(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ a(x) = -\frac{1}{x} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right] \quad - (2)$$

を示す。

①に2112

$$(e^{-\int a(x)dx} f(x))' = -a(x) e^{-\int a(x)dx} f(x) + e^{-\int a(x)dx} f'(x)$$

$$= e^{-\int a(x)dx} \{ f'(x) - a(x)f(x) \}$$

$\therefore e^{-\int a(x)dx} > 0$ より

$f'(x) - a(x)f(x) \leq 0$ (①の左辺) より, $(e^{-\int a(x)dx} f(x))' \leq 0$
 したがって, $e^{-\int a(x)dx} f(x)$ は広義単調減少であるから ①が示された。 //

②に2112

$$\begin{cases} f'(x) \leq -\frac{f(x)}{x} \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{を示す。}$$

$$\text{①より, } f'(x) \leq -\frac{f(x)}{x} \Rightarrow e^{-\int (-\frac{1}{x})dx} f(x) = xf(x) \text{ は} \\ \text{広義単調減少} \quad - (1')$$

$\therefore$ ②より, $x \geq 1$ のとき

$$0 < xf(x) \leq 1 - f(1) \quad \text{とわかる。}$$

全2の辺を x で割ると

$$0 < f(x) \leq \frac{1-f(1)}{x}$$

このとき, $x \rightarrow \infty$ とすると, $\frac{f(1)}{x} \rightarrow 0$ に収束する。

以上から, はさみうちの原理より, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ //