

3 関数 $f(x, y) = -x^2 + 2hxy - y^2$ に関して $f(x, y)$ の極値を求めよ。
ただし、 h は実数とする。

(解) $f_x = -2x + 2hy$, $f_{xx} = -2$, $f_{xy} = f_{yx} = 2h$
 $f_y = 2hx - 2y$, $f_{yy} = -2$

$A = f_{xx}$, $B = f_{xy}$, $C = f_{yy}$ とする。

$H = B^2 - AC = (2h)^2 - (-2)(-2) = 4h^2 - 4 = 4(h^2 - 1)$ とおく。

• $|h| > 1$ のとき $H > 0$ より 極値をとらない。

• $|h| = 1$ のとき $H = 0$ より 判別式だけでは極値をとるかどうかが不明。

• $|h| < 1$ のとき $H < 0$ より 極値をとる。 $A < 0$ より 極大値をとる。

ここで、 $f_x = f_y = 0$ のときの停留点 (x, y) を求めると、

$$\begin{cases} -2x + 2hy = 0 \\ 2hx - 2y = 0 \end{cases} \quad |h| < 1 \text{ のとき、 } (h^2 - 1)y = 0 \text{ より } y = 0, x = 0$$

したがって、 $(x, y) = (0, 0)$ のとき $f(x, y)$ の
極大値 は 0

一方、 $|h| = 1$ のとき、

$f(x, y) = -x^2 \pm 2xy - y^2 = -(x \mp y)^2$ となり、

$h = 1$ のとき $y = x$ をみたす (x, y) で、

極大値 0 をとる。

$h = -1$ のとき $y = -x$ をみたす (x, y) で

極大値 0 をとる