

2009 後半?

微分積分学 I 過去問

NO.

DATE

□ (1) $y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ を $x > 0$ で微分せよ。

(解) $1+x^2 > 0$ であるので 両辺 $\log$ をとる。 $\log y = \frac{1}{x} \log(1+x^2)$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot x - \log(1+x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\log(1+x^2)}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (1+x^2)^{\frac{1}{x}} \left\{ \frac{2}{1+x^2} - \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \right\} \\ &= 2(1+x^2)^{\frac{1}{x}-1} - \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \log(1+x^2) \quad \text{--- (答)} \quad // \end{aligned}$$

(2) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とおく。 $y = \sinh x$ の逆関数 $x = g(y)$ とし、導関数 $\frac{dx}{dy}$ を求めよ。

(解) $e^y = X$ とおく。

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{X - \frac{1}{X}}{2} \quad \therefore X^2 - 2xX - 1 = 0 \quad \therefore X = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$X = e^y > 0 \text{ より } X = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \therefore e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad g(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{--- (答)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} g(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$$

$$= \frac{1}{\cosh x} \quad \text{--- (答)} \quad (\because \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0)$$

(3) 次の極限値を求めよ。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$

(解) $x \rightarrow 0$ とき $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{0}{0}$ の不定形となるので、ロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \log(1-x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{-1}{1-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} \quad \text{--- (答)} \quad // \end{aligned}$$