

1, 2 及び 3 を解答しなさい。また 4~7 のなかから 2 題選択して解きなさい。
解答用紙に選択した問題の番号を明記すること。

1. 次の問に答えよ。

(1) $y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ を x で微分せよ。

(2) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とおく。 $y = \sinh x$ の逆関数 $x = g(y)$ 及び導関数 $\frac{dx}{dy}$ を求めよ。

(3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \log(1-x)}{x^2}$$

2. 次の関数の () 内で定義された偏導関数 (導関数) を求めよ。

(1) $z = e^{x^2+y^2}$ (z_x, z_y)

(2) $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ (z_x, z_y)

(3) $u = e^x \sin y$ (u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})

(4) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ ($\frac{dy}{dx}$)

(5) $z = \sin^{-1}(xy)$, $x = \sin(u+v)$, $y = \sin(u-v)$ (z_u, z_v)

3. ある正数 ε が存在して, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ の近傍 $U((a, b); \varepsilon)$ の任意の点 (x, y) に対して $f(a, b) > f(x, y)$ (または, $f(a, b) < f(x, y)$) が成り立つとき $f(a, b)$ を関数 $f(x, y)$ の極大値 (または極小値) という。

関数 $f(x, y) = -x^2 + 2hxy - y^2$ に関して $f(x, y)$ の極値を求めよ。ただし h は実数とする。

4. $f(x)$ を適切な範囲で定義されている微分可能な関数とする。以下を示せ。
 $f'(x) \leq a(x)f(x)$ が成り立つとき $e^{-\int a(x)dx} f(x)$ は広義単調減少である。さらに $f(x) > 0$, $a(x) = -\frac{1}{x}$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。

5. $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ が $f^{(n)}(x) = \alpha$ をみたしているとき, $f(x)$ は n 次の多項式であることを示せ。ただし, α は零でない定数とする。

6. 次を示せ。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

7. $a_n = \sqrt{a_n} + r$, $a_1 > 0$ により数列 $\{a_n\}$ を定義する。 $r > \frac{1}{2}$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散を調べよ。収束する場合は極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。