

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

△問 8. 平均値の定理(ラグランジュの定理)を述べよ([5点])。次に、この定理の図形的な意味を説明せよ([5点])。さらに、この定理の証明の概略を述べよ([5点])。

問 9. (1) 関数 $f(x)$ に適当な条件を仮定した上で、テイラーの定理を述べよ。[8点]

X(2) 関数 $f(x)$ は、点 $x = a$ を含む開区間で4回連続微分可能であり、 $f^{(4)}(a) > 0$ および $f^{(k)}(a) = 0$ ($1 \leq k \leq 3$) を満たしている。このとき、 $f(x)$ は $x = a$ で極小値をもつことを示せ。[7点]

問 10. (1) テイラーの公式を利用して、次の不等式を証明せよ。[8点]

$$|\sin x - x + \frac{x^3}{6}| \leq \frac{x^5}{120} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$$

(2) テイラーの公式を利用して、極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4}$ を求めよ。[7点]

$$4! - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

X問 11. 点 $x = a$ を含む開区間で定義された、 C^2 -級の関数 $f(x)$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。ただし、必要ならばテイラーの定理を用いてもよい。[15点]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a).$$

問 12. $f(x, y)$ は、点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍 V で定義された実数値関数とする。

(1) $f(x, y)$ が、 (x_0, y_0) で連続とは如何なることか。その定義を述べよ。[4点]

(2) $f(x, y)$ が、 (x_0, y_0) で偏微分可能とは如何なることか。その定義を述べよ。[4点]

(3) $f(x, y)$ が、 (x_0, y_0) で全微分可能とは如何なることか。その定義を述べよ。[7点]

問 13. 次のように定義される $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ について、原点 $(0, 0)$ での連続性を調べよ([3点])。次に偏微分可能性を調べよ([4点])。さらに全微分可能性を調べよ([8点])。

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0)), \quad f(0, 0) = 0.$$

問 14. 関数 $z = 2x^2 - y^2$ は、 xyz -空間における曲面を表している。この曲面上の点 $(1, 1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ([7点])。また、法線の方程式を求めよ([8点])。