

以下の問題群 (15 点 $\times$ 14 問 = 210 点) から総点が 100 点を越えるように選択し解答せよ。
100 点満点で成績評価します。得点が 100 点を越える場合は、成績優秀者と判定します。

問 1. 集合 $I (\subset \mathbb{R})$ 上の関数 $f(x)$ の, 点 $a \in \mathbb{R}$ における極限值は, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と表される。

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ とは如何なることか ($\alpha \in \mathbb{R}$)。 ε - δ 論法による定義を述べよ。 [6 点]
- (2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が, $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) で与えられている場合, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つことを示せ。 [9 点]

問 2. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上限は $\sup A$ と表される。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 s に対して, $s = \sup A$ とは如何なることか。その定義を述べよ。 [5 点]
- (2) 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq x \leq 2\pi\}$ を数直線上に図示せよ ([5 点])。

次に, 上限 $\sup A$ を求めよ ([3 点])。また, 最大値 $\max A$ の存在について考察せよ ([2 点])。

問 3. ランダウの記号を用いれば, 関数の漸近挙動が記述される。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) とは如何なることか。その定義を述べよ。 [5 点]
- (2) $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$) とは如何なることか。その定義を述べよ。 [5 点]
- (3) 関数 $f(x)$ が点 $x = x_0$ で微分可能であるための必要十分条件を, ランダウの記号を用いて記述せよ。 [5 点]

問 4. 次の関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で連続になるように定数 a, b を決めよ。 [15 点]

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x < 0),$$

$$f(x) = ax + b \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 6}}{x - 1} \quad (x > 1).$$

$$b = 1, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

問 5. a は, $|a| \neq 1$ を満たす定数とする。 $f(x)$ は $x = 0$ で連続な $\mathbb{R}$ 上の関数で, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f(ax) = f(x)$ が成り立つものとする。このとき, $f(x)$ は定数関数になることを証明せよ。 [15 点]

問 6. 定数 a ($a > 0, a \neq 1$) に対応して, 指数関数 $f(x) = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$) は如何なる方法で定義されるか。その手順の概略を述べよ。 [15 点]

問 7. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ($x \geq 0$); $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x < 0$) によって定義された関数 $f(x)$ が, 点 $x = 0$ で微分可能になるように定数 a, b, c を定めよ。 [15 点]

$$b = 1, \quad c = 1$$