

17 (a) 曲面 $z = \frac{1}{xy}$ の $(x, y) = (a, b)$ における接面の方程式を求めよ。

(解) $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 y}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{xy^2}$

点 (a, b) における接平面の方程式は、

$$z = -\frac{1}{a^2 b} (x-a) - \frac{1}{ab^2} (y-b) + \frac{1}{ab}$$

$$\therefore z = -\frac{x}{a^2 b} - \frac{y}{ab^2} + \frac{3}{ab}$$

(参考) $z = f(x, y)$ で表される曲面の点 (a, b) における接面の方程式は、

$$z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b) \quad \text{で表される。}$$

(教科書に一致しています)

(b) (a) で求めた接平面と 3つの座標平面 $x=0, y=0, z=0$ で

囲まれた四面体の体積を求めよ。

(解) (a) の接平面の方程式において、

$$x=0, y=0 \text{ のとき } z = \frac{3}{ab}$$

$$x=0, z=0 \text{ のとき } \frac{y}{ab^2} = \frac{3}{ab} \therefore y = 3b$$

$$y=0, z=0 \text{ のとき } \text{同様に} x = 3a$$

よって、四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{2} \times |3a| \times |3b| \times \left|\frac{3}{ab}\right| \times \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$

