

6) $\ell(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ とする。このとき、 $\ell^{(n)}(0)$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

$$(解) \ell'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{1+t}} \quad \text{とおく。} \quad \ell'(x) = f(x^2)$$

$$f(t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(t) = -\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}, \quad f''(t) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+t)^{-\frac{5}{2}}, \dots$$

$$f^{(n)}(t) = (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})(1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)\} (1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} (1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)} (1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot n!} (1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$n=0 \text{ のとき, } \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{2^0 \cdot 0!} = 1 \quad \text{となり 成り立つ。}$$

$f(x)$ は原点近くで、 C^∞ -級関数 なるので、教科書 p.65 定理 4.2 により、

$$g \rightarrow \ell', \quad a_n = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{として 考え、}$$

$$(\ell'(x) = f(x^2))$$

$$\ell^{(n+1)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots) \\ \frac{(2k)!}{k!} a_k & (n=2k, k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ell^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=2k, k=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1} \\ \frac{(2k)!}{k!} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} \cdot k!} & (n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\ell^{(0)}(0) = \log 1 = 0 \text{ より } \textcircled{1} \text{ は } n=0 \text{ のときにも成り立つ。}$$

$$\text{ゆえに } \ell^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=2k, k=0, 1, 2, \dots) \\ (-1)^k \cdot \left\{ \frac{(2k)!}{2 \cdot k!} \right\}^2 & (n=2k+1, k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

{答}