2009年度 微分積分学Ⅰ　期末試験

NO. ②

（玉木） DATE

4、次の関数の極値をもとめよ。

$f(x) = e^{-x} \sin x$

（解） $f'(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{e^{x}}$ 　$f'(x) = 0$ を満たすのは、$\cos x - \sin x = 0$ のときの x

すなわち、$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ 　$\therefore\ x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$ （n：整数）

ここで $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において増減表をつくると、

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

よって、 $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ のとき 極大値 $f\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{1}{4} + 2n\right)\pi}$

$x = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$ のとき 極小値 $f\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{5}{4} + 2n\right)\pi}$

（n：整数）〃

5、関数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - 2y$ の極値をもとめよ。

（解） $f(x, y)$ の偏導関数 f_x、f_y は、

$$\begin{cases} f_x = 2x + 3y \\ f_y = 2y + 3x - 2 \end{cases}$$

$f_x = 0$，$f_y = 0$ のとき、$x = \frac{6}{5}$，$y = -\frac{4}{5}$

次に、$f(x, y)$ の 2階偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} は、

$f_{xx} = 2$、$f_{xy} = f_{yx} = 3$、$f_{yy} = 2$ となる。

ここで、$f_{xx} = A$、$f_{xy} = B$，$f_{yy} = C$ とおくと、

$B^2 - AC = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5 > 0$ となり、

$B^2 - AC > 0$ なので、$f(x, y)$ は極値を持たない 〃

（参考）㊖ P.118 定理5.3 の 2変数関数の極値を参考にしてください。

（$A = f_{xx}(a, b)$、$B = f_{xy}(a, b)$、$C = f_{yy}(a, b)$ として $H = B^2 - AC$ が判別式となる）