

試験問題 (微分積分学 I) (2011 年 7 月 26 日)

注意:

- 問題 1, 問題 2, 問題 3 に対し, それぞれ解答用紙を 1 枚使うこと。
- 解答用紙 (3 枚) 全ての右上に, 学籍番号と名前を記入すること。
- 提出の際は, 解答用紙 3 枚を重ねて 2 つ折りにし, 提出すること。
- 解答用紙の裏面を用いた場合は, そのことを分かるように表面に記入すること。

問題 1:

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に収束することの定義を書け。また, $\pm\infty$ に発散することの定義を書け。
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることの定義を書け。
- (3) 関数 $f(x)$ に対し, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であることの定義を書け。また, $f(x)$ が点 a で連続であることの定義を書け。
- (4) 関数 $f(x)$ が $x = c$ で微分可能であることの定義を書け。
- (5) 関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で全微分可能であることの定義を書け。また, (a, b) で x に関して偏微分可能であることの定義を書け。

問題 2:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ であることを定義に従って示せ。
- (2) 第 n 項が $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n}$ によって定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ。
- (3) $f(x) = e^x \cos x$ の n 階導関数を求めよ。
- (4) 次の関数 $f(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ (答えのみでよい)。
(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \sin x$ (c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ($|x| < 1$)

問題 3:

- (1) 次の集合の中で $\mathbb{R}^2$ 内の開集合となるものを挙げよ。また, 閉集合となるものを挙げよ。
(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0\}$.
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$. (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r\}$.
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. (f) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (2) 関数 $f(x, y) = xy$ は点 $(0, 0)$ で連続であることを示せ。
- (3) 関数 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) に対し, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ は存在しないことを示せ。
- (4) 以下の関数 $f(x, y)$ の 2 階偏導関数までを全て (1 階偏導関数も) 求めよ。
(a) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ (b) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$
- (5) 関数 $f(x, y) = e^{ax} \cos by$ に対し, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ を求めよ。