

問題3

(2) $f(0,0) = 0 \cdot 0 = 0$ かつ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ を示す。

任意の正数 ε に対して $\delta = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$ かつ $|y| < \sqrt{\varepsilon}$
 $\Rightarrow |xy| < \varepsilon$

(3) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ のとき $r \rightarrow 0$

よって $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{2} \sin 2\theta$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ と近づけていくとき

$\theta = 0$ とすると, $f(x,y) \rightarrow 0$.

$\theta = \frac{\pi}{4}$ とすると, $f(x,y) \rightarrow \frac{1}{2}$ となる。 θ の値によって

$(0,0)$ への近づき方が変わるので 連続ではない。

(4) (a) $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$

$f_x(x,y) = y - 2xy - y^2$ $f_y(x,y) = x - x^2 - 2xy$ (答)

$f_{xx}(x,y) = -2y$ $f_{xy}(x,y) = 1 - 2x - 2y$

$f_{yx}(x,y) = 1 - 2x - 2y$ $f_{yy}(x,y) = -2x$ (答)

(b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$f_x(x,y) = -2x e^{-x^2-y^2}$ $f_y(x,y) = -2y e^{-x^2-y^2}$ (答)

$f_{xx} = -2e^{-x^2-y^2} - 2x(-2x)e^{-x^2-y^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$ (答)

$f_{xy} = -2x(-2y)e^{-x^2-y^2} = 4xy e^{-x^2-y^2}$