問題2

(4). テイラー展開の公式は. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}$

(a) $f^{(n)}(x)=e^x$ よって $f^{(n)}(0)=e^0=1.$

よって $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ —(答)

(b) $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

同様にして $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n=2k\quad(k=0,1,2,\cdots)\\(-1)^k & n=2k+1\quad(k=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

よって $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ —(答)

(c) $f(x)=(1-x)^{-2}$ $f'(x)=-2(-1)(1-x)^{-2-1}=2(1-x)^{-3}$

同様にして. $f^{(n)}(x)=(-1)^n(-2)(-3)\cdots(-n-1)\,(1-x)^{-n-1-1}$

$=(n+1)!\,(1-x)^{-n-2}$

$f^{(n)}(0)=(n+1)!$

よって $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ —(答)