

$$(2) |a_{n+1} - a_n|$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} + \frac{n+1}{2n} \text{ であるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| \neq 0$$

よって, $\{a_n\}$ はコーシー列ではないので, $\{a_n\}$ は収束しない.

$$(3) f(x) = e^x \cos x$$

$$f'(x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$f'(x) = -2e^x \sin x$$

$$= 2e^x \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = 2e^x \left\{ -\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) \right\}$$

$$= -2(\sin x + \cos x)e^x$$

$$f^{(4)}(x) = 2^2 e^x \cos(x + \pi)$$

$$n = 2k \text{ のとき } (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$f^{(n)}(x) = f^{(2k)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4}) \dots (\star)$$

と推測される.

$n=0$ のとき $(\star)$ 成立

$n=2$ のとき成立すると仮定すると

$$f^{(2)}(x) = 2^{\frac{2}{2}} e^x \cos(x + \frac{2\pi}{4})$$

$$f^{(2+1)}(x) = 2^{\frac{2}{2}} e^x \left\{ -\sin(x + \frac{2\pi}{4}) + \cos(x + \frac{2\pi}{4}) \right\}$$

$$f^{(2+2)}(x) = 2^{\frac{2}{2}} e^x \left\{ -\sin(x + \frac{2\pi}{4}) + \cos(x + \frac{2\pi}{4}) \right. \\ \left. - \cos(x + \frac{2\pi}{4}) - \sin(x + \frac{2\pi}{4}) \right\}$$

$$= -2^{\frac{2}{2}+1} e^x \sin(x + \frac{2\pi}{4})$$

$$= 2^{\frac{2}{2}+1} e^x \cos(x + \frac{2+2}{4}\pi) \text{ となるので,}$$

$n=2+2$ ($=2m+2$) のとき成立する.

よって, 数学的帰納法より $(\star)$ は成立.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4}) & (n=0, 2, \dots, 2k) \\ 2^{\frac{n}{2}} e^x \left\{ \cos(x + \frac{n\pi}{4}) - \sin(x + \frac{n\pi}{4}) \right\} & (n=1, 3, \dots, 2k+1) \end{cases}$$

($n=1, 3, \dots, 2k+1$)

別解 $f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4})$ は数学的帰納法で証明する. ①

[1] $n=0$ のとき, ①は成立する.

[2] $n=k$ " ①が成立すると仮定すると.

$$f^{(k)}(x) = 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos(x + \frac{k\pi}{4})$$

$n=k+1$ のとき.

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x)$$

$$= 2^{\frac{k}{2}} e^x \left\{ \cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sin(x + \frac{k\pi}{4}) \right\}$$

$$= 2^{\frac{k}{2}} e^x \cdot \sqrt{2} \cos(x + \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= 2^{\frac{k+1}{2}} e^x \cos(x + \frac{k+1}{4}\pi)$$

$$(\because \sqrt{2} \cos(u + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (\cos u \cos \frac{\pi}{4} - \sin u \sin \frac{\pi}{4}) \\ = \cos u - \sin u)$$

よって $n=k+1$ のときも成立する.

$$\psi 2: f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4})$$