

問題 1

(1) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは、
任意の正数 ε に対して、ある自然数 n_0
が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となること。

$\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散するとは、
任意の正数 M に対して、ある自然数 n_0
が存在して

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$$

($K-M$)

となること。

(2) $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは、
任意の正数 ε に対して、ある自然数 n_0
が存在して、

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

となること。

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ($x \in I$) とは、
任意の正数 ε に対して、ある $\delta > 0$ が
存在して

$$0 < |x - a| < \delta \ (x \in I) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となること。

$f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となること。

(4) $f(x)$ が $x = c$ で微分可能であるとは、
あるとき、

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ が収束すること。}$$

(5) f が点 (a, b) で微分可能であるとは、

$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + o(1) \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

ただし、 $o(1) \rightarrow 0$ ($(x, y) \rightarrow (a, b)$)

となる定数 α, β が存在すること。

また、 f が (a, b) で $x(y)$ に関して
偏微分可能であるとは、 f が $x(y)$ の
関数として、 $x = a$ ($y = b$) で微分可能であること。

問題 2

(1) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$

$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n$ とおけば $\delta_n > 0$ 。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ を示せばよい。

$$n = (1 + \delta_n)^n = 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$$

であるから、

$$0 < \delta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

ここで任意の正数 ε に対して、

$n_0 > \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right)^2$ となる自然数 n_0 とおけば、

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\delta_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_0-1}} < \varepsilon$$

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ である。

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$