

微分積分学 I 期末試験問題

注意:

- 途中経過の計算等は省略し、解答のみを解答用紙に書くこと。
- 解答の順序は問わない。

問題 1. 上に有界な単調増加数列に対して成り立つことを以下の選択肢から選べ:

(a) 収束する; (i) 発散する; (u) 収束と発散いずれの場合もある。

問題 2. 以下の極限値を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} \quad 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^{-1} x}{\tanh^{-1} x} \quad 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x^2 + x} \quad 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} \quad 1$$

問題 3. 以下の関数 $f(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求めよ。

$$(1) f(x) = 2x^2 - x = -x + 2x^2 \quad (2) f(x) = \log(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

問題 4. 以下の関数 $f(x, y)$ について、2 階偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ。

$$(1) f(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 \quad f_{xx} = 6x - 2y, f_{xy} = 2x - 6y, f_{yy} = -2x + 2y$$

$$(2) f(x, y) = -x - y + (x+y)\log(x+y) \quad f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = \frac{1}{x+y}$$

$$f_{xx} = \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}, f_{xy} = \frac{3y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3} \quad (3) f(x, y) = \cosh(xy) \quad f_{xx} = y^2 \cosh(xy), f_{xy} = x^2 \cosh(xy), f_{yy} = \sinh(xy) + 2y \cosh(xy)$$

$$(4) f(x, y) = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \quad f_{xx} = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^3}$$

問題 5. n をある自然数とし、 $\mathbb{R}^2$ の点 $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ が与えられているとする。

各 $i = 1, \dots, n$ に対して、勝手な点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と (a_i, b_i) との距離を $d_i(x, y)$ と書く。関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $f(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x, y)^2$ と定める。

(1) f の停留点を全て求めよ。

(2) 上で求めた各停留点において、

(a) f は極大である;

(i) f は極小である;

(u) f は極大でも極小でもない;

のいずれに該当するかを答えよ。

$$x = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad y = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$$

以上。

$$H = 4n^2 > 0$$

$$f_{xx} = 2n = A$$

$$f_{xy} = 2n = C$$

$$f_{yy} = f_{xx} = 0 = B$$

$$B^2 - 4AC = -4n^2$$

$$H = 4n^2 > 0$$