2009年7月30日

平成２１年度前期　力学（宗像）試験問題

解答用紙（A3）1枚（両面記入可）に氏名・学籍番号と解答を記入し提出すること。
２枚以上にわたる解答用紙は受け取らないので注意すること。

問１．慣性モーメントがIで半径がrの円板が、固定された水平な中心軸の周りに自由に回転できるようになっている。これに長い糸をかけ、両端に質量がm_1, m_2 $(m_1 > m_2)$のおもりをつるす。糸は円板を滑らないとして、以下の問に答えよ。

（１）　円板とおもりの運動方程式を書け。

（２）　おもりの加速度（$\ddot{z}_1$）を求め、糸が滑り円板が回転しない場合と比べよ。

（３）　静止状態からm_1がhだけ落下（m_2がhだけ上昇）した時のおもりの運動エネルギーの合計を求めよ。

（４）　（３）の運動エネルギーと位置エネルギーの減少分の差が円板の回転運動のエネルギーに等しいことを示せ。

問２．２次元の極座標系（r, θ）で、質点の速度と加速度の成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$v_r = \dot{r},\ v_\theta = r\dot{\theta},\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

質点の質量をmとして、以下の問に答えよ。

（１）　この質点の運動エネルギーTを、r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$を用いて表せ。

（２）　力$\mathbf{F}(F_r, F_\theta)$が作用するとき、力が質点に対して行う仕事$dW/dt$は以下のように与えられる。

$$dW/dt = F_r v_r + F_\theta v_\theta = m(a_r v_r + a_\theta v_\theta)$$

$dW/dt = dT/dt$であることを示せ（仕事－エネルギー定理）。

（３）　$\mathbf{F}$が万有引力ポテンシャル$U = -GmM/r$から導かれる保存力の時、$dW/dt = -dU/dt$であり、したがって全エネルギー$E = T + U$が一定に保たれる（$dE/dt = 0$）ことを示せ。

（４）　（３）の万有引力は中心力（$F_\theta = 0$）だから$dW/dt = F_r v_r = m(\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}r\dot{\theta}^2)$である。これが$dT/dt$に等しいことを示せ（ヒント：角運動量保存則、すなわち$a_\theta = 0$を用いる）。

問３．N 個の質点が、外力を一切受けず内力のみを及ぼしあっている質点系がある。j番目の質点がi番目の質点に及ぼす内力を$\mathbf{F}_{ji}$として、以下の問に答えよ。

（１）　i番目の質点の質量をm_iとして、この質点の運動方程式を書け。

（２）　質点系の全運動量（$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$）が一定に保たれることを示せ。

（３）　重心の加速度（$\ddot{\mathbf{R}}$）がゼロであることを示せ。

（４）　質点系の全角運動量（$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$）が一定に保たれることを示せ。

問４．中心軸周りに自由に回転できる質量M、半径Rの球（中心軸周りの慣性モーメントをIとする）が静止している。この球の赤道面上の点 P に質量mの弾丸が速度vで水平に入射し、衝突後に弾丸と球は一体となって回転を始めた。問３．（４）の事実を用いて、以下の問に答えよ。ただし重力の影響は無視せよ。

（１）　衝突前に弾丸が持っていた球の中心軸まわりの角運動量はいくらか？

（２）　衝突後、軸周りに回転する系全体（球＋弾丸）の角速度はいくらか？

（３）　衝突後のエネルギーが、弾丸が衝突前に持っていた運動エネルギーより減少している事を示せ。