

2007年前期 力学 期末試験 解答例.

問題1

- (1) $\mathcal{L} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}$ を用いて運動方程式より $m \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ となる。
両辺を $\mathcal{L}$ の関数と見做す。

$$m \mathcal{L} \cdot \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathcal{L}^2}{dt}$$

∴ 両辺を t で積分する。

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

∴ 右辺は AB 間の $\mathbf{F}$ の仕事に等しい。
// (5)

- (2) $\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) : U$ は位置のみの関数。
// (5)

- (3) (1) & (2) より $\frac{1}{2} m v_B^2 + U(\mathbf{r}_B) = \frac{1}{2} m v_A^2 + U(\mathbf{r}_A)$ が任意の点 A, B に成り立つ。
∴ 全エネルギーは一定。
// (5)

- (4) 運動方程式は $\mathbf{p}$ を用いて $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ と書ける。

$$\text{両辺を } \mathbf{r} \text{ のベクトル積と見做す。} \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} : \mathcal{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} //$$

- (5) 中に $\mathbf{p}$ を $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) : \mathbf{F}$ はスカラー関数

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{L} = \text{一定} (\mathcal{L} \text{ は保存量}) //$$

 $\mathcal{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ を含む軌道面に垂直∴ $\mathcal{L}$ が一定ならば軌道面と一定の平面と一致運動はこの定平面内に限られる。
//

(10)