

平成 25 年度前期 力学 (宗像) 中間試験問題

問 1. ばね定数 k のばねについた、質量 m のおもりの単振動について、以下の間に答えよ。

- (1) 運動方程式の一般解を書け。
- (2) (1) の一般解を用いて、 $t = 0$ に $x = -a$ から静かに手を離した場合の解を書け。
- (3) (1) の一般解を用いて、 $x = 0$ で静止しているおもりに、 $t = 0$ に $-x$ 方向の初速度 $v_0 (> 0)$ を加えた場合の解を書け。

問 2. 2 次元の極座標系 (r, θ) で、質点の速度と加速度の成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

質点の質量を m として、以下の間に答えよ。

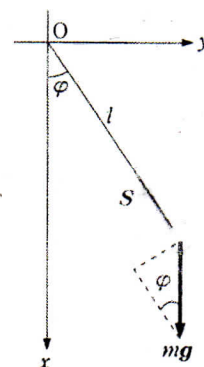
- (1) この質点の運動エネルギー K を、 $r, \dot{r}, \dot{\theta}$ を用いて表せ。
- (2) 力 $\mathbf{F}(F_r, F_\theta)$ が作用するとき、力が質点に対して行う仕事 dW/dt は以下のように与えられる。

$$dW/dt = F_r v_r + F_\theta v_\theta = m(a_r v_r + a_\theta v_\theta)$$

$dW/dt = dK/dt$ であることを示せ (仕事-エネルギー定理)。

- (3) \mathbf{F} が万有引力ポテンシャル $U = -GmM/r$ から導かれる保存力の時、 $dW/dt = -dU/dt$ であり、したがって力学的エネルギー $E = K + U$ が一定に保たれる ($dE/dt = 0$) ことを示せ。

問 3. 右図のように、一定の長さ l の軽い糸の一端 O を固定し、他端に質量 m のおもりのつるした単振り子の運動について、以下の間に答えよ。ただし、糸の張力を S 、重力加速度の大きさを g とする。



- (1) 図 1 のデカルト座標 (x, y) を用いて、運動方程式 (x, y の時間に関する二階の微分方程式) を書け。
- (2) $x = l \cos \varphi, y = l \sin \varphi$ を用いて、(1) の運動方程式から $\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi / l$ と $S = mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) 極座標系 (r, φ) ($r = l = \text{一定}$) でおもりの運動方程式を書き、それが (2) と一致することを示せ。
- (4) エネルギー保存則を用いて、 $\varphi = \pi/2$ の位置から静かに落下させたおもりが、 $\varphi = 0$ で持つ速さと、張力 S を求めよ。
- (5) おもりが微小振動していて $\sin \varphi \approx \varphi$ ($\varphi \approx 0$) とみなせるとき、振動の周期を求めよ。