力学（宗像）小テスト問題（2013 年 7 月 11 日）

単位ベクトル$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$の間のベクトル積

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

を用いて以下の問に答えよ。

（１）位置ベクトルを$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$、運動量ベクトルを$\mathbf{p}=p_x\mathbf{i}+p_y\mathbf{j}+p_z\mathbf{k}$とするとき、角運動量$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$の三成分$l_x, l_y, l_z$を求めよ。

（２）力を$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}$とするとき、力のモーメント$\mathbf{N}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$の三成分$N_x, N_y, N_z$を求めよ。

（３）運動方程式$d\mathbf{p}/dt=\mathbf{F}$を用いて、$d\mathbf{l}/dt=\mathbf{N}$が成り立つことを示せ（（１）で求めた$\mathbf{l}$の三成分をそれぞれ微分し、それが（２）で求めた$\mathbf{N}$の三成分にそれぞれ等しいことを示す）。

2 次元の極座標系（r、θ）で、質点の速度と加速度の成分はそれぞれ、

$$v_r=\dot{r}、\quad v_\theta=r\dot{\theta}、\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2、\quad a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\quad で与えられる。$$

質点の質量をmとして、以下の問に答えよ。2 次元極座標系の単位ベクトル$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$の間のベクトル積（$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$間のベクトル積と同様）を用いること。

（１）この質点の角運動量$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$の大きさ$l$を、$r$, $\dot{\theta}$で表せ。

（２）dl/dtをr, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$で表せ。

（３）この質点に働く力が中心力の時、lが一定に保たれる（$dl/dt=0$）ことを示せ。

①

(1) $\mathbb{l}=\mathbb{r}\times\mathbb{P}= xp_y\mathbb{k}-xp_z\mathbb{j}-yp_x\mathbb{k}+yp_z\mathbb{i}+zp_x\mathbb{j}-zp_y\mathbb{i}$

$=\underbrace{(yp_z-zp_y)}_{l_x}\mathbb{i}+\underbrace{(zp_x-xp_z)}_{l_y}\mathbb{j}+\underbrace{(xp_y-yp_x)}_{l_z}\mathbb{k}$

(2) $\mathbb{N}=\mathbb{r}\times\mathbb{F}=\underbrace{(yF_z-zF_y)}_{N_x}\mathbb{i}+\underbrace{(zF_x-xF_z)}_{N_y}\mathbb{j}+\underbrace{(xF_y-yF_x)}_{N_z}\mathbb{k}$

(3) $\frac{d\mathbb{l}}{dt}=\frac{d(\mathbb{r}\times\mathbb{P})}{dt}=\underbrace{\dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{P}}_{=0}+\mathbb{r}\times\dot{\mathbb{P}}=\mathbb{r}\times\frac{d\mathbb{P}}{dt}=\mathbb{r}\times\mathbb{F}=\mathbb{N}$ //

$\dot{\mathbb{r}}=\frac{1}{m}\mathbb{P}$より

②

(1) $\mathbb{l}=\mathbb{r}\times\mathbb{P}=mr^2\dot{\theta}\,\mathbb{e}_z$　∴ $l=mr^2\dot{\theta}$ //

(2) $\frac{dl}{dt}=2mr\dot{r}\dot{\theta}+mr^2\ddot{\theta}$

(3) 質点に働く力が中心力 ⇒ $a_\theta=0$

⇒ $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$

よって、$\frac{dl}{dt}=mr\underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})}_{=0}=0$

lは一定に保たれる。//

6/6