

力学（宗像）小テスト問題（2013年5月30日）

極座標系では質点の位置を (r, θ) で表し、運動に伴って r, θ は、それぞれ時間とともに変化する。極座標系の基本ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は、直交座標系の基本ベクトル \mathbf{i}, \mathbf{j} と $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ という関係にある。以下の問いに答えよ。

- (1) $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$, $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r$ であることを示せ。
- (2) 惑星の位置ベクトルは $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ である。(1) の関係を用いて、速度ベクトル $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ の成分 v_r, v_θ が $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r \dot{\theta}$ で与えられることを示せ。
- (3) (1) の関係を用いて、加速度ベクトルの成分 a_r, a_θ が $a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$, $a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$ で与えられることを示せ。
- (4) 位置 (r, θ) にある質量 m の惑星が、原点に固定された質量 M の太陽から万有引力を受けながら運動している。万有引力定数を G として、極座標系でのこの惑星の運動方程式を書け。また、その運動方程式から、直ちにどのようなことが言えるか？