

力学（宗像）小テスト問題（2013年5月2日）

質量 m の質点が、 xy 平面内で原点を中心とする半径 a の円周上を等速運動しており、時刻 t でのその座標 $(\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j})$ は $x(t) = a \cos \omega t$, $y(t) = a \sin \omega t$ で与えられる。以下の問に答えよ。

- (1) この質点の速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$ を求めよ。
- (2) $\mathbf{v}(t)$ が $\mathbf{r}(t)$ と直交することを示せ。
- (3) この質点の加速度ベクトル $\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j}$ を求め、 $\mathbf{a}(t)$ が $\mathbf{r}(t)$ と反平行（原点向き）であることを示せ。
- (4) この質点の運動方程式が $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega^2 \mathbf{r} = -\frac{mv^2}{a^2} \mathbf{r}$ で与えられることを示せ。ただし、 $v = |\mathbf{v}(t)| = a\omega$ 。
- (5) (4) の運動方程式を用いて、この運動では、物理量 $E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ が一定に保たれる（すなわち $\frac{dE}{dt} = 0$ である）ことを示せ。

ばね定数 k のばねについた、質量 m のおもりの単振動について、以下の問に答えよ。

- (6) 運動方程式の一般解を書け。
- (7) (6) の一般解を用いて、 $t = 0$ に $x = -a$ から静かに手を離した場合の解を書け。
- (8) (6) の一般解を用いて、 $x = 0$ で静止しているおもりに、 $t = 0$ に $-x$ 方向の初速度 $v_0 (> 0)$ を加えた場合の解を書け。