

小テスト 第5回

No.

Date _____

$$(1) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}, \quad m \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$\hookrightarrow$ ①
 $\hookrightarrow$ ②

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} m v^2 + V$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}$$

②より $r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2 \dot{\theta} (= \text{一定})$ であるので $h = r^2 \dot{\theta} (= \text{一定})$ とおくと、

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \quad \& \quad E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) - \frac{GMm}{r}$$

h は定数 $\leftarrow$ point なので

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m (2\dot{r}\ddot{r} - \frac{2h^2}{t^3} \cdot \dot{r}) + \frac{GMm}{t^2} \cdot \dot{r}$$

$$= m \dot{r} \left(\dot{r} - \frac{h^2}{r^3} \right) + \frac{GMm}{r^2} \cdot r$$

$$\therefore \text{①より } \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \text{ なの?}$$

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{r} \left(-\frac{GM}{r^2} \right) + \frac{GMm}{r^2} \cdot \dot{r} = 0$$

ゆえに E は保存することが示せた。