固有値 ± 1 に属する固有空間 $\ker(A \mp I_4)$ を考えて

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} y &= \pm x \\ z &= x \\ w &= \pm x \end{aligned}$$

よって $\ker(A \mp I_4)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\pm i$ に属する固有空間 $\ker(A \mp iI_4)$ を考えて

$$\begin{pmatrix} \mp i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \mp i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} y &= \pm i \\ z &= -x \\ w &= \mp i \end{aligned}$$

よって $\ker(A \mp iI_4)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ -1 \\ \mp i \end{pmatrix}$ がとれる。

$\mathbb{C}^4$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$ に関する A の表現行列は

$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & i & \\ 0 & & & -i \end{pmatrix}$ となる。//

実際 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ i & 1 & -i & -1 \\ -i & 1 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ とする。また、$\forall c \in K$ とする。

(1) $h(x+x', y) = (x_1+x_1')\overline{y}_1 + (x_2+x_2')\overline{y}_2$
$= x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_1'\overline{y}_1 + x_2'\overline{y}_2$
$= h(x, y) + h(x', y)$

$h(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 = \overline{y}_1 x_1 + \overline{y}_2 x_2 = \overline{y_1\overline{x}_1 + y_2\overline{x}_2}$
$= \overline{h(y, x)}$

$h(cx, y) = cx_1\overline{y}_1 + cx_2\overline{y}_2$
$= c(x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2)$
$= c\,h(x, y)$

$h(x, x) = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2$
$x_1 = a_1 + b_1 i$, $x_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$ とすると
$h(x, x) = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \geqq 0$
また、$h(x, x) = 0$ とすると $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ となり $x = 0$
逆に $h(0, 0) = 0$
以上のことから $h(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2$ は内積である。

(2) $h(2x, y) = 4x_1^2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$
$2h(x, y) = 2x_1^2\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$
よって $x_1^2\overline{y}_1 \neq 0$ のとき $h(2x, y) \neq 2h(x, y)$ であり、
$h(x, y) = x_1^2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2^2$ は内積ではない。

(3) $h(x, x) = x_1\overline{x}_1 - x_2\overline{x}_2$
これは常に0以上だとは言えないから $h(x, y) = x_1\overline{y}_1 - x_2\overline{y}_2$ は内積ではない。

$\boxed{3}$ $\forall f'(x) \in V$, $\forall c \in K$ とすると
$h(f(x) + f(x)', g(x)) = \int_0^1 \{f(x) + f(x)'\} g(x)\,dx$
$= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx + \int_0^1 f(x)' g(x)\,dx$
$= h(f(x), g(x)) + h(f(x)', g(x))$

$h(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = h(g(x), f(x))$
$= \overline{h(g(x), f(x))}$

$h(cf(x), g(x)) = \int_0^1 cf(x)g(x)\,dx = c\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = c\,h'(f(x), g(x))$

$h(f(x), f(x)) = \int_0^1 f(x)^2\,dx \geqq 0$

また、明らかに $h(f(x), f(x)) = 0$ のとき $f(x) = 0$ であり、
$f(x) = 0$ のとき $h(f(x), f(x)) = 0$

よって $h(f(x), g(x))$ は内積である。