問題

1 次の行列の固有値と最小多項式を求めよ。また、対角化できる場合は対角化せよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $\mathbb{C}^2$ のベクトル $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して $h(x, y)$ を次のように定めたとき、$h(x, y)$ が内積であるかどうか調べよ。

(1) $h(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$

(2) $h(x, y) = x_1^2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}^2$

(3) $h(x, y) = x_1\overline{y_1} - x_2\overline{y_2}$

3 3次以下の係数が実数の多項式の集合を V とし、
$f(x), g(x) \in V$ として
$h(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ としたとき

$h(f(x), g(x))$ が内積であるかどうか調べよ。

解答

[1] (1) 行列 A の固有多項式を $\chi_A(t)$ とする。

$$\chi_A(t) = \det(tI_2 - A) = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3)(t-4) - 2$$

$$= t^2 - 7t + 10 = (t-2)(t-5)$$

よって 行列 A の固有値は $2, 5$

A の最小多項式を $\varphi_A(t)$ とすると、$\varphi_A(t)$ は $\chi_A(t)$ を割り切り、固有値 $2, 5$ を根に持つので 明らかに $\varphi_A(t) = (t-2)(t-5)$

$\varphi_A(t)$ が重根を持たないので 行列 A は対角化できる。

まず、固有値 2 に属する固有空間 $\ker(A - 2I_2)$ を考えると

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_2) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$x = -2y$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y$

よって $\ker(A - 2I_2)$ の基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

同様に 固有値 5 に属する固有空間 $\ker(A - 5I_2)$ を考えると

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A - 5I_2) \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$x = y$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x$

よって $\ker(A - 5I_2)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$\mathbb{C}^2$ の基底 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する A の表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ となる。

実際 $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 行列Bの固有多項式を $\chi_B(t)$ とする。

$$\chi_B(t) = \det(tI_3 - B) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -6 \\ 1 & t-3 & -6 \\ -1 & 1 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)(t-3)(t+1) - 6 - 6 - \{-6(t-1) - (t+1) + 6(t-3)\}$$

$$= t^3 - 3t^2 + 4 = (t+1)(t^2-4t+4) = (t+1)(t-2)^2$$

よって行列Bの固有値は $-1, 2$

行列Bの最小多項式を $\varphi_B(t)$ とすると $\varphi_B(t)$ は $\chi_B(t)$ を割り切り、固有値 $-1, 2$ を根に持つ。

よってその候補は $(t+1)(t-2)$, $(t+1)(t-2)^2$

$g(t) = (t+1)(t-2)$ とすると

$$g(A) = (A+I_3)(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

$h(t) = (t+1)(t-2)^2$ とすると

$$g(A) = (A+I_3)(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = O$$

よって $\varphi_B(t) = (t+1)(t-2)^2$ となる。$\varphi_B(t)$ が重根を持つので対角化不可。

(3) 行列Cの固有多項式を $\chi_C(t)$ とする。

$$\chi_C(t) = \det(tI_4 - C) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & -1 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & t^2 \\ t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \end{vmatrix} = -1 + t^4 = (t^2-1)(t^2+1)$$

$$= (t+1)(t-1)(t+i)(t-i)$$

よって行列Cの固有値は $\pm 1, \pm i$

行列Cの最小多項式 $\varphi_C(t)$ は $\chi_C(t)$ を割り切り、固有値 $\pm 1, \pm i$ を根として持つから $\varphi_C(t) = (t+1)(t-1)(t+i)(t-i)$

$\varphi_C(t)$ は重根を持たないから行列Cは対角化できる。