固有値と対角化

・固有値と対角化の問題の求め方

例題：行列$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$の固有値と最小多項式をもとめよ。また、対角化できる場合は対角化せよ。

[解説]　Aの固有多項式を$\chi_A(t)$とする。

$$\chi_A(t)=\det(tI_3-A)\quad(I_3\text{は3次の単位行列})$$

$$=\begin{vmatrix}t-2&1&1\\1&t-2&1\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)-(t-1)=(t-1)(t^2-4t+4-1)$$

$$=(t-1)(t^2-4t+3)=(t-1)^2(t-3)$$

よって$\chi_A(t)=0$とした時の解$t=1,3$がAの固有値である。

Aの最小多項式を$\varphi_A(t)$とする。

$\varphi_A(t)$は$\chi_A(t)$を割り切り、Aの固有値1, 3を根に持つ。

よって$\varphi_A(t)$の候補は$(t-1)(t-3)$, $(t-1)^2(t-3)$である。

$g(t)=(t-1)(t-3)$とすると、tにAを代入して

$$g(A)=(A-I_3)(A-3I_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

最小多項式は$\varphi_A(t)$の候補の中でtについて最小の次数を持つので、$\varphi_A(t)=g(t)=(t-1)(t-3)$だと分かる。

また、$\varphi_A(t)$は重根を持たないので対角化可能である。

(※重根を持っていた場合は対角化できない。)

まず、固有値1に属する固有空間$\ker(A-I_3)$について考える。

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A-I_3)$とすると、$(A-I_3)X=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$

よって　$y=-x-z$　となり、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-x-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}z$となる。

よって $\ker(A-I_3)$ の基底として $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる。

同様に、固有値3に属する固有空間 $\ker(A-3I_3)$ について考える。

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A-3I_3)$ とすると $(A-3I_3)X=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$

$$\begin{cases}-x+y+z=0\\x-y+z=0\\-2z=0\end{cases}\quad \text{よって}\quad \begin{matrix}x=y\\z=0\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}x$$

よって $\ker(A-3I_3)$ の基底として $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ がとれる。

$\mathbb{C}^3$ の基底 $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{固有値1に属する固有空間の基底}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{固有値3に属する固有空間の基底}}$ に関するAの表現行列は

対角行列 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ となる。

対応　対応

実際 $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ とすると $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&-2\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\text{ となる。}$$

重要そうな定義と定理

定義 V: K 上のベクトル空間

写像 h : $V \times V \to K$

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \longrightarrow & K \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & h(x, y) \end{array}$$

が(1)〜(4)をみたす時 h を V 上の内積という。

(1) $h(x+x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$ $(x_1, x_2, y \in V)$

(2) $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$ $(x, y \in V)$

(3) $h(cx, y) = ch(x, y)$ $(c \in K, x, y \in V)$

(4) ${}^{\forall} x \in V$ に対して $h(x, x) \geqq 0$ で「$h(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$」

定義 $A \in M(n, n; \mathbb{C})$ が

① 正規行列 $\Longleftrightarrow$ $A\,{}^{t}\overline{A} = {}^{t}\overline{A}\,A$

② エルミート行列 $\Longleftrightarrow$ ${}^{t}\overline{A} = A$

③ 歪エルミート行列 $\Longleftrightarrow$ ${}^{t}\overline{A} = -A$

④ 対称行列 $\Longleftrightarrow$ ${}^{t}A = A$

⑤ ユニタリ行列 $\Longleftrightarrow$ $A\,{}^{t}\overline{A} = I_n$($n$ 次単位行列)

定理 (Toeplitzの定理) 行列 $A \in M(n, n; \mathbb{C})$ に対して

A が正規行列 $\Longleftrightarrow$ あるユニタリ行列 U に対して $U^{-1}AU$ は対角行列になる。

定義 V: 体 K 上のベクトル空間

$f: V \times V \to K$ が(1)〜(3)をみたすとき f は対称双一次行列という。

(1) $f(v_1+v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$ $(v_1, v_2 \in V)$

(2) $f(cv_1, w) = cf(v, w)$ $(c \in K, v, w \in V)$

(3) $f(v, w) = f(w, v)$ $(v, w \in V)$