ζ 函数

zero*
聖光学院数学研究会

2008 年 3 月 25 日

1. 布石

去年の続きということで ζ 函数*1 を更に深く考察したいと思います。

1.1 余興

昨年度は $\zeta(2)$ を Euler が発見した導出法で、**2.** にも多少触れられています。今年度はある函数を Fourier 展開する事により $\zeta(2), \zeta(4)$ を求めてみたいと思います。Fourier 展開についてはここで説明すると長くなるので前提知識として進めます。Fourier 展開は物理方面によく用いられます。まず、Fourier 展開する周期函数を決めます。

少し天下りになりますが、

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad (-\pi < x \leqq \pi)$$

なる周期 2π の函数 $y = f(x)$ を決め、これを Fourier 展開します。

f: even より、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kxdx$$

---

* mailto:whitby@u01.gate01.com

*1 $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots (\mathrm{Re}\, s > 1)$

とおきます。

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left|\frac{\sin kx}{k}x^2\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}dx\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x\sin kx}{k}dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left|-\frac{\cos kx}{k^2}\cdot 2x\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos kx}{k^2}\cdot 2\right)dx\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot 2\pi - \left|-\frac{\sin kx}{k^3}\cdot 2\right|_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot 2\pi\right) \\
&= \frac{2\cdot(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
f(x) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx = \frac{\pi^2}{2} \quad (-\pi < x \leqq \pi)
$$

ここに $x = \pi$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{2} \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)
\end{aligned}
$$

このような $\zeta(2)$ の導出法もあります。　(◎ o ◎)/˜˜

1.2　函数の用意

演習がてら、次の函数の Fourier 展開をしてください。

問題 1 次の周期 2π の函数 $y = f(x)$ を Fourier 展開せよ。

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\,(0 < x \leqq \pi) \\ -\frac{\pi}{4}\,(-\pi < x \leqq 0) \end{cases}
$$

答え

1.1 と同様なので、解答のみ示す。これは 4. で使う。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{2k}\sin kx \\
&= \sum_{k:\mathrm{odd}}\frac{\sin kx}{k}
\end{aligned}
$$

1.3 $\zeta(3)$

今回は

2. 無限積

ζ 函数に関連している話題の中でもっとも有名なものの一つが $\zeta(2)$ です。いわゆる

$$\zeta(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

というものです。これは、無限積表示とマクローリン展開

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

の係数比較で求まるというのですが、無限積はどうやって示すのでしょう。

証明は何通りか知られていて、$\cot z$ の表示方法を使った積分による証明があります。

$\cot z$ は $z=n\pi\,(n\in\mathbb{Z})$ で 1 位の極を持ちます。よって留数 $\operatorname*{Res}_{z=n\pi}\cot z$ は

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to n\pi}\cot z\,(z-n\pi)\\&=\lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin(z-n\pi)}\frac{\sin(z-n\pi)}{\sin z}\cos z\\&=(-1)^n\cdot 1\cdot(-1)^n=1\end{aligned}$$

となります。$z=t\pm Ri, z=R\pm ti\left(R=n\pi+\dfrac{\pi}{2}, t\in\mathbb{R}\right)$ で囲まれた正方形を積分路 (C) として $f(z)=\dfrac{\cot z}{z-\zeta}$ を積分します。(ζ は $|z|<R$ 内の任意の定点,ζ 函数ではありません)

特異点は $z=n\pi\,(n\in\mathbb{Z})$ なので留数定理より

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(\cot\zeta+\sum_{t=k\pi}\frac{1}{t-\zeta}\right)$$

となります。よって

$$\cot\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz-\sum_{t=k\pi}\frac{1}{t-\zeta}\qquad(☆)$$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz&=\int_C\frac{\cot z}{z-\zeta}dz\\&=\int_C\frac{\cot z}{z}dz+\zeta\int_C\frac{\cot z}{z(z-\zeta)}dz\end{aligned}$$

と変形すると、右辺第 1 項は 0 なので、

$$\int_C f(z)\,dz=\zeta\int_C\frac{\cot z}{z(z-\zeta)}dz$$

ここで

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

という事実を使って、$z = t \pm Ri, z = R \pm ti$ について絶対値を上から抑えて計算すると、

$$|\cot z| < 2$$

よって

$$\left|\int_C \frac{\cot z}{z\,(z-\zeta)}dz\right| < \frac{2}{|R\,(R-\zeta)|}\int_C dz < \frac{2 \cdot 8R}{R\,(R-|\zeta|)} \underset{R(n)\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

だから☆は

$$\begin{aligned}\cot z &= \lim_{k\to\infty}\sum_{t=k\pi}\frac{1}{z-t}\\ &= \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}\end{aligned}$$

となります。そこで、

$$\int_0^{\pi}\left(\cot z - \frac{1}{z}\right)dz = \int_0^{\pi}\left(2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2\pi^2}\right)dz$$

と積分して、対数を外すと、

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{★}$$

となります。　(^o^)/~~

3.　準備

ここで、少し長くはなりますが、Γ 函数の導入をして、函数等式との関連を考察したいと思います。Γ 函数は、メジャーな定義があるのですが、違った定義をしたいと思います。この函数は階乗の函数を全実数、またも全複素平面に拡張したものです。

$$\begin{aligned}\Gamma\,(s) &= (s-1)!\\ \Gamma\,(s+1) &= s\Gamma\,(s)\end{aligned}$$

3.1　Weierstrass の公式

まずは $s \in \mathbb{N}$ で Γ 函数を定義したいと思います。

$$\begin{aligned}\Gamma\,(s+n) &= (s+n-1)!\\ &= (s+n-1)\,(s+n)\,(s+n-1)\cdots(n+1)\,n\,(n-1)!\\ &= n^s\left(1+\frac{s-1}{n}\right)\left(1+\frac{s-2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1\cdot(n-1)!\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+n) &\sim n^s(n-1)! \\
\Gamma(s+n-1) &\sim \frac{n^s(n-1)!}{s+n-1} \\
\Gamma(s+n-2) &\sim \frac{n^s(n-1)!}{(s+n-1)(s+n-2)} \\
&\vdots \\
\Gamma(s) &\sim \frac{n^s(n-1)!}{(s+n-1)\cdots(s+1)s} \qquad (n\in\mathbb{N})
\end{aligned} \tag{▲}$$

この $\Gamma(s)$ を $\Gamma_n(s)$ とする。この $\Gamma_n(s)$ が $n\to\infty$ で収束するかどうか調べる。

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)} &= \frac{\frac{(n+1)^s n!}{(s+n)\cdots(s+1)s}}{\frac{n^s(n-1)!}{(s+n-1)\cdots(s+1)s}} = \frac{(n+1)^s n!}{n^s(n-1)!}\cdot\frac{1}{s+n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^s\cdot\frac{n}{s+n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^s\cdot\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(1+\frac{s}{n}+O_1\right)\left(1-\frac{s}{n}+O_2\right) \\
&= 1+O\sim 1
\end{aligned}$$

より $\Gamma_n(s)$ は収束する。

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty} s\cdot\frac{n^s(n-1)!}{(s+n-1)\cdots(s+1)s} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^s(n-1)!}{(s+n-1)\cdots(s+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{\left(1+\frac{s}{n-1}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{1}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(s+1) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\log n^s-\left(\log\left(1+\frac{s}{1}\right)+\log\left(1+\frac{s}{2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{s}{n-1}\right)\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{s\log n-\left(\log\left(1+\frac{s}{1}\right)+\log\left(1+\frac{s}{2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{s}{n-1}\right)\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{s\log n-\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{s}{k}\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{s\log n-\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(\frac{s}{k}-\frac{s^2}{2k^2}+\frac{s^3}{3k^3}-\cdots\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\begin{array}{c} s\log n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right) \\ -\frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^3}\right)-\cdots \end{array}\right\} \\
&= -\gamma^{*2}s+\frac{\zeta(2)}{2}s^2-\frac{\zeta(3)}{3}s^3+\cdots
\end{aligned}$$

ここで、$\log n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma + C$ とすると、

$$\begin{aligned} n^s &= e^{s\log n} = e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma+C\right)} \\ &\sim e^{-\gamma s} \cdot e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \\ s\Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{s}{k}\right)} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lim_{n\to\infty} s^{-1} \cdot n^s \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} s^{-1} \cdot e^{-\gamma s} \cdot e^{s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} &= \lim_{n\to\infty} s \cdot e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{s}{k}\right) \\ &= s \cdot e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}\right) \end{aligned}$$

これが Wierestrass の公式というものです。こうすることによって、s を全実数に拡張する事が出来ます。

3.2 倍積公式

Γ 函数の倍積公式とは、

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)$$

▲ より

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{s}{2}}(n-1)!}{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{s}{2}+n-1\right)} \cdot \frac{n^{\frac{s+1}{2}}(n-1)!}{\frac{s+1}{2}\left(\frac{s+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{s+1}{2}+n-1\right)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} n^{s+\frac{1}{2}} (n-1)!^2}{s(s+1)\cdots(s+2n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{2n-s} n^{\frac{1}{2}} \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!} 2^{2n} \frac{(2n)^s (2n-1)!}{s(s+1)\cdots(s+2n-1)} \\ &= \Gamma(s) \lim_{n\to\infty} 2^{2n-s} n^{\frac{1}{2}} \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

ここで $s = 1$ とする。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = \Gamma(1) \lim_{n\to\infty} 2^{2n-s} n^{\frac{1}{2}} \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!}$$

$$\therefore 2\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n-s} n^{\frac{1}{2}} \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!}$$

よって示された。　(^o^)/~~

3.3　$\Gamma(s)\Gamma(1-s)$

定理 2

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$$

証明

3.1 より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}&=\frac{1}{-s\Gamma(s)\Gamma(-s)}\\&=-\frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}s\cdot(-s)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)\\&=s\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)\end{aligned}$$

1. の ★ 式の z を πz とおくと、

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

よって

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)=\frac{\sin\pi s}{\pi s}$$

だから

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}&=\frac{\sin\pi s}{\pi}\\\Gamma(s)\Gamma(1-s)&=\frac{\pi}{\sin\pi s}\end{aligned}$$

(^o^)/~~

3.4　Γ 函数再定義

3.1 で定義した Γ 函数が

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

であることを示そうと思います。いくつかの補題を示します。

補題 3

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt=n^s\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\binom{n}{r}}{r+s}=\frac{n}{n+s}\Gamma_n(s)$$

$\boxed{\text{補題の証明}}$

(1 つ目の等号)

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt &= \int_0^n \left(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(-\frac{t}{n}\right)^r\right) t^{s-1}dt \\ &= \int_0^n \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{n^r} t^{r+s-1}\right) dt \\ &= \left|\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{n^r} \cdot \frac{t^{r+s}}{r+s}\right|_0^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{n^r} \cdot \frac{n^{r+s}}{r+s} \\ &= n^s \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r \binom{n}{r}}{r+s}\end{aligned}$$

(2 つ目の等号)

(左辺) $= f(s)$、(右辺) $= g(s)$ とおき、留数を比べる。

$f(s)$ は $0, -1, \cdots - n$ で 1 位の極を取る。

$z = -k$ における留数は

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -k} (z+k) f(z) &= \lim_{z\to -k} (z+k) \cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r \binom{n}{r}}{r+z} \\ &= \lim_{z\to -k} (z+k) \cdot \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k+z} \\ &= (-1)^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

$g(z)$ も $0, -1, \cdots - n$ で 1 位の極を取る。

$z = -k$ における留数は

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -k} (z+k) g(z) &= \lim_{z\to -k} (z+k) \frac{n!}{(z+n)\cdots(z+k)\cdots(z+1)z} \\ &= \frac{n!}{-k(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(-k+n)} \\ &= (-1)^k \binom{n}{k}\end{aligned}$$

よって、$f(z) = g(z)$ (^o^)/~~

補題 4

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

である。

$\boxed{\text{補題の証明}}$

まず、つぎの不等式を示す。

(Under Construction)

4. 函数等式

定理 5

$$\zeta(1-s)=\pi^{-s}\zeta(s)\,2^{1-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)$$

いくつかの補題を示す。

補題 6 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ のとき

$$\int_0^\infty y^{s-1}e^{-iny}dy=n^{-s}\Gamma(s)\,e^{-\frac{s\pi i}{2}}$$
$$\int_0^\infty y^{s-1}e^{iny}dy=n^{-s}\Gamma(s)\,e^{\frac{s\pi i}{2}}$$

$\boxed{\text{補題の証明}}$

①を証明する。

$$\int_0^\infty y^{s-1}e^{-ny}dy=n^{-s}\Gamma(s) \qquad (◎)$$

$f(z)=z^{s-1}e^{-nz}$ は図の C において、

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

また、$\displaystyle\lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{C_1}f(z)\,dz=0,\ \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{C_3}f(z)\,dz=0$ より、

$$\int_{C_2}f(z)\,dz+\int_{C_4}f(z)\,dz=0$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty z^{s-1}e^{-nz}dz&=\int_0^{\infty i}z^{s-1}e^{-nz}dz\\&=\int_0^\infty(iy)^{s-1}e^{-nyi}idy\\&=i^s\int_0^\infty y^{s-1}e^{-nyi}dy\end{aligned}$$

よって◎より、

$$\begin{aligned}n^{-s}\Gamma(s)&=i^s\int_0^\infty y^{s-1}e^{-nyi}dy\\&=e^{\frac{s\pi i}{2}}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-nyi}dy\end{aligned}$$

これにて示された。

$\int_0^\infty y^{s-1}e^{iny}dy = n^{-s}\Gamma\left(s\right)e^{\frac{s\pi i}{2}}$ も同様に示せる。　(ˆ oˆ)/˜˜
よって 2 式より、

$$\int_0^\infty y^{s-1}e^{iny}dy - \int_0^\infty y^{s-1}e^{-iny}dy = n^{-s}\Gamma\left(s\right)e^{\frac{s\pi i}{2}} - n^{-s}\Gamma\left(s\right)e^{-\frac{s\pi i}{2}}$$
$$2\int_0^\infty y^{s-1}\sin ny dy = 2n^{-s}\Gamma\left(s\right)\sin\frac{\pi s}{2}$$

両辺を n^{-1} 倍し、奇数番の和だけ取ると、1.2 より、

$$\int_0^\infty y^{s-1}\sum_{n:\mathrm{odd}}\frac{\sin ny}{n}dy = \Gamma\left(s\right)\sin\frac{\pi s}{2}\sum_{n:\mathrm{odd}}n^{-(s+1)}$$

ここで次の補題を示す。

補題 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}n^{-s} = \left(1-2^{-s+1}\right)\zeta(s)$$

$\boxed{\text{補題の証明}}$

$$\begin{aligned}\zeta\left(s\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\right)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)^{-s}\\ &= 2^{-s}\zeta\left(s\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)^{-s}\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n:\mathrm{odd}}^{\infty}\left(2n+1\right)^{-s} = \left(1-2^{-s}\right)\zeta(s) \tag{△}$$

△ より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}n^{-s}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\right)^{-s}\\ &= \left(1-2^{-s}\right)\zeta(s) - 2^{s}\zeta\left(s\right)\\ &= \left(1-2^{-s+1}\right)\zeta(s)\end{aligned}$$

これにて示された。　(ˆoˆ)/˜˜
△ より、

$$\int_0^\infty y^{s-1}\sum_{n:\mathrm{odd}}\frac{\sin ny}{n}dy = \Gamma\left(s\right)\sin\frac{\pi s}{2}\left(1-2^{-(s+1)}\right)\zeta(s+1) \tag{¥}$$

1.2 より、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{s-1}\sum_{n:\mathrm{odd}}\frac{\sin ny}{n}dy &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}y^{s-1}dy \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\int_0^\pi y^{s-1}dy+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}y^{s-1}dy\right) \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{4s}+\frac{\pi}{4}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left|\frac{y^s}{s}\right|_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right) \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{4s}+\frac{\pi^{s+1}}{4s}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^s-k^s\right)\right) \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{4s}\left(\begin{array}{c} 1 \\ -\left(2^s-1^s\right) \\ +\left(3^s-2^s\right) \\ -\left(4^s-3^s\right) \\ \vdots \end{array}\right) \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{4s}\cdot 2\left(1^s-2^s+3^s-4^s+\cdots\right) \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{2s}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^s \\
&= \frac{\pi^{s+1}}{2s}\left(1-2^{s+1}\right)\zeta(-s) \qquad (\$)
\end{aligned}$$

¥, $ より、

$$\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\left(1-2^{-(s+1)}\right)\zeta(s+1)=\frac{\pi^{s+1}}{2s}\left(1-2^{s+1}\right)\zeta(-s)$$

s に $s-1$ を代入して、

$$\begin{aligned}
\Gamma(s-1)\cos\frac{\pi s}{2}\left(1-2^{-s}\right)\zeta(s) &= \frac{\pi^s}{2(s-1)}\left(1-2^s\right)\zeta(1-s) \\
\zeta(1-s) &= \zeta(s)\Gamma(s)\pi^{-s}2\cos\frac{\pi s}{2}\frac{2\left(2^s-1\right)}{\left(1-2^{-s}\right)} \\
&= 2^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\pi^{-s}
\end{aligned}$$

(^o^)/~~

3.3 より

$$
\begin{aligned}
\zeta(1-s) &= 2^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\pi^{-s} \\
&= 2^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\sin\frac{(s+1)\pi}{2}\pi^{-s} \\
&= 2^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\frac{\pi}{\frac{\pi}{\sin\frac{(s+1)\pi}{2}}}\pi^{-s} \\
&= 2^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s}
\end{aligned}
$$

ここで 3.2 より

$$
\begin{aligned}
\zeta(1-s) &= 2^{1-s}\zeta(s)\pi^{1-s}\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \\
&= \zeta(s)\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}
$$

これが函数等式である。

定理 8 左辺を $Z(s)$ とすると

$$
Z(s) = Z(1-s)
$$

左辺と右辺が対象的な形で非常に美しい。これの発見により ζ 函数の世界はますます発展していった。

5. 5 分休み

少し流れから外れてみます。

5.1 $\zeta(3)$

5.2 ζ(奇数)

6. $\zeta(2n)$

定理 9

$$
\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}
$$

1. より

$$
\sin z = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)
$$

これを $x = -\frac{1}{2}ui$ とおき、両辺を対数微分する。

まず左辺から。

$$
\begin{aligned}
(\log \sin x)' &= \left(\log \sin \left(-\frac{1}{2}ui\right)\right)' \\
&= \frac{1}{\sin\left(-\frac{1}{2}ui\right)} \cdot \cos\left(-\frac{1}{2}ui\right) \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{\frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{i}} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^u + 1}{e^u - 1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1}
\end{aligned}
\tag{※}
$$

右辺も。

$$
\begin{aligned}
\left(\log\left(x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right)\right)' &= \left(\log x + \log\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right)' \\
&= \left(\log\left(-\frac{1}{2}ui\right) + \log\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{u^2}{4k^2\pi^2}\right)\right)' \\
&= -\frac{2}{ui} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2} \\
&= \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2}
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

※と$*$は等しいので

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u}{4k^2\pi^2 + u^2}
$$

これを用いる。Bernoulli 数 B_n とは

$$
\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}
$$

で定義される数だったので、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}B_{2k}\frac{u^{2k}}{(2k)!}&=\frac{u}{e^u-1}-1+\frac{u}{2}\\&=u\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2u}{4k^2\pi^2+u^2}\right)-1+\frac{u}{2}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2}{4k^2\pi^2+u^2}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\cdot\frac{4k^2\pi^2}{4k^2\pi^2+u^2}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{u^2}{4k^2\pi^2}}\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2}{4k^2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{u}{2k\pi}\right)^{2n-2}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u}{2k\pi}\right)^{2n}(-1)^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\zeta(2n)\,2^{-2n+1}\pi^{-2n}(-1)^{n+1}\right)u^{2n}\end{aligned}$$

u について係数比較すると、

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!}=\zeta(2n)\,2^{-2n+1}\pi^{-2n}(-1)^{n+1}$$

よって示された。　(^o^)/~~

7.　素数定理・Riemann 予想

ζ 函数の理論は素数の分布についての議論や今のところ未解決な Riemann 予想に繋がっています。まだ理解度不足なので定理だけここに記したいと思います。

定理 10 (素数定理)

$$\pi(x)\sim\int_0^{\infty}\frac{dt}{\log t}\sim\frac{x}{\log x}$$

但し $\pi(x)=\#\{p|p\text{:prime},p\leqq x\}$

予想 11 (Riemann 予想)

臨界領域にある $\zeta(s)=0$ なる s はすべて

$$s=\frac{1}{2}+ti\quad(t\in\mathbb{R})$$

の形をしている。

臨界領域とは、$0<\operatorname{Re}s<1$ の範囲内の点の集合である。また、$\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ なる実数 t が無限に存在する事も知られている。しかし、そのほかには無いということはいまだに示されていない。

8.　参考文献

[1]　応用解析序説　平松豊一　牧野書店

[2]　複素関数論

[3]　解析概論　高木貞治　岩波書店

[4]　The Riemann Zeta Function　Alexsandar Ivic　Dover

[5]　数論入門　DB ザギヤー　岩波書店

[6]　現代数学の源流　佐武一郎　朝倉書店

[7]　フーリエ解析入門　谷川昭夫　共立出版

[8]　複素解析へのアプローチ　山本稔・坂田定久　裳華房