

庚 万延元年
申 仲秋吉日



今有如圖平圓內容者其赤白圓
言青圓徑六十九寸白圓徑二十五寸
問得外圓幾何術如何

答曰外圓徑一百二十五寸

術曰置青徑減白徑餘以除白徑
二十六段加一圓平方開之加一圓
半之以來者得外圓徑合問

說問流傳術
門人
本田民部信行

東都芝愛山



寬政元 己酉年閏六月

今有如圖四 內容甲圓二個 乙
圓 只云 甲圓徑六十九寸
乙圓 二十三寸 問外圓幾何
術如何

答曰外圓徑一百二十一寸

術曰置甲徑乘乙徑 三之開
平 加乙徑 名天 自之 倍
之 減甲徑冪 以除天二段甲
徑 乘乙徑 得外徑 合問

最上流 會田安明門人
鈴木忠義

最上流 葉 漸



今有如圖外內內
容甲圓而画乙丙
丁戊之累圓只云
外圓徑一百六十
八寸甲圓徑八十
八寸乙圓徑三寸
乃乙圓徑八從外
甲徑差少者用之
問累圓之內至多
內徑

答曰 多門徑
七十七寸

数学研究会通信 第叁号

まえがき

本日は聖光祭および数学研究会にお越しいただき誠にありがとうございます。

数学研究会は 2005 年 6 月に正式に設立され、現在は中 2～高 2 の 11 名の数学が好きな同志が集い研究活動をしたり、問題を作成したり、それを解きあったり、いろいろな数学ゲームを楽しんだりしています。また、定期的に行われる数学大会（広中杯，日本数学オリンピックなど）にも順次参加しています。

数学研究会が聖光祭に出展したのは、数学の楽しさ、面白さをあまり数学とのつき合いのない一般の人たちにも理解してもらうためです。そして、活動成果の一部ではありますが、今年が没後 300 周年の「**関孝和**」を中心とした記事(必ずしも関係しているとは言えませんが)を主に載せました。

最後に、多方面から数学研究会の支援をして下さった小泉先生、出口先生、名塩先生、また他の方々に感謝申し上げます。

2008 年度聖光祭 数学研究会一同

Contents

関孝和に関連する記事はゴシックにしてあります。

01. **関孝和の生涯** 猪苗代大路 小澤創 外園晋夫 松崎舜
02. $x^n + y^n = z^n$ の自然数解 $n = 2, 4, 3$ の場合について 神谷俊輔
03. 共円 猪苗代大路 小澤創 外園晋夫 松崎舜
04. **魔法陣とその入れ子** 久良尚任
05. **Coffee Break** 四方紘太郎
06. 記号論理 梅島圭立
07. パズル七則
08. 整角四角形について 徳満凜也
09. Pell 方程式と連分数 高橋直
10. **ζ 関数—Riemann 予想へ** 四方紘太郎
11. 編集後記

関孝和の生涯

中 2 猪苗代大路, 小澤創, 外園晋夫, 松崎舜

1. 関孝和の生涯

2008 年は日本の和算家である関孝和の没後 300 周年です。彼は鎖国状態の日本で中国からの書物のみで独学で数学の研究を進め和算から高度な数学理論を確立させた人物です。関孝和の弟子でもっとも有名な建部賢弘は八代将軍の徳川吉宗にこういいました。

「関孝和は吾が師たり。曾て立元の法に拠て真仮を設けて解伏題の法術を立為せり。是れ亦神なりと謂うべし」



関孝和が生まれたのはちょうどヨーロッパでニュートンが生まれた頃です。彼の誕生年は 1635 年から 1643 年まで諸説あり、生まれた場所も群馬県藤岡と江戸小石川の二説あります。小さい頃に両親を失い関家の養子となりました。そして独学で吉田光由の「塵劫記」と言う数学所を研究し独自の和算の世界を創始します。幼少時の関孝和は「神童」の名を欲しいままにし大人の間違ひも指摘したそうです。その後孝和は後に 6 代将軍となる徳川家宣に仕え入場も果たします。何故なら彼は数学者であるだけではなく藤岡藩士、幕府の勘定奉行、天文学者、暦法学者でもあったからです。しかし暦法学の研究においては新しい暦法を考案したにもかかわらず他人のものが採用されてしまい幕府に認められなかったこともありました。

関孝和の数学の業績はとても多いです。まず中国の伝統数学である天元術を改善して点鼠術という未知数に文字を用いる数の表し方を開発しました。点鼠術によって連立多元一次方程式の解を求める公式を生み出し行列式の考えに辿りついたのだがそれはヨーロッパで発明される 200 年前のことでした。

また n 次方程式の近似的な解を求める方法を英吉利のホーナーが発表する 100 年前に考案しています。さらに 30 代で円理を發明し、円に内接する 131072 角形を利用することで円周率を 11 桁計算しました。この計算には特殊な漸化式**エイトケン加速**(エイトケン加速については [3](#). を参照してください)が使われています。エイトケン加速はひとつずつの解を求めるのではなく何個かおきに求めるので効率的です。1674 年に出版された「発微算法」は生涯唯一の出版物です。筆算による代数の計算法などについて述べた本です。

そのほかベルヌーイ数をヤコブ・ベルヌーイよりも早く求めたこと、不定方程式の研究、招差法の一般化、円錐曲線理論の端緒、方陣、円陣、魔方陣、継子立ての理論の研究、和算としてひろいもの、盗人隠し、裁ち合わせ、鼠算、旅人算、かくれんぼう、油分け算を研究しました。

しかしそんな彼の人生は決して幸福なものではありませんでした。40 歳で結婚して 2 人の子供が生まれるがともに早死してしまっし、養子に取った甥は放蕩のため学問を続けられず、関孝和の死後関家は断絶してしまいました。また彼の業績が認められ「算聖」と言われたのは彼の死後になってからでした。1708 年関孝和は家宣が将軍になるのを見ずに病死しました。

明治維新後和算は政府に切り捨てられ衰退していきました。

時は流れ 1980 年、オランダの数学者、ガロア理論の研究者ファン・デル・ヴェルディンが日本に来日しました。欧羅巴よりも進んでいた、関孝和の研究を知り本当に彼らは西洋数学を知らなかったのかと絶句したそうです。

2. 和算とは？

吉田光由が書いた「塵劫記」によって多くの人が数学に興味を持つようになりました。特に、そろばんや数学を得意とする人たちが、「塵劫記」をモデルに数学書を著すようになりました。吉田光由は寛永 18 年 (1641) に「新篇塵劫記」を出版し、その中に解答を載せない問題を提出して、問題に挑戦す

るように促しました。解答を載せない問題を和算では遺題と呼びますが、遺題を解いて新たに遺題を提出する遺題継承の風習が始まりました。遺題継承によって、数学に興味を持つ人たちの数学のレベルは着実に上がってきました。そろばんによる計算だけでなく、宋・元時代に中国で発達した方程式論、天元術を理解する数学者が出てきました。そして延宝2年(1674)に、沢口一之の「古今算法記」の遺題15問を解いた関孝和の「発微算法」が発表され、中国数学を越えた和算が誕生しました。関孝和は傍書法という和算における文字式を発案しただけでなく、その後の和算発展の基礎となる多くの仕事をしました。世界初の行列式の導入もその一つです。寛永4年(1627)に「塵劫記」が刊行されてからわずか50年足らずで、江戸時代の数学は大きな高みへのぼりました。関孝和以降の和算の進展は関孝和の仕事を精密にし、拡張していったと言っても過言ではありません。遺題は塵劫記の作者、吉田光由が世界の数学者に挑戦した12問が始まりといわれています。その中から2問を挙げてみたいと思います。(現代風に訳しています。)

遺題1: $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。 $BC = a, CA = b, AB = c$ とするとき次の条件を満たす a, b, c を求めよ。

$$\begin{cases} a + b = 81 \\ a + c = 72 \end{cases}$$

遺題2: 松、檜、杉、栗の各一本の代銀をそれぞれ、 a, b, c, d とする。このとき、次の条件を満たす a, b, c, d を求めよ。

$$\begin{cases} 80a + 50b = 2790 \\ 120a + 40c = 2322 \\ 90c + 150d = 1932 \\ 120d + 7b = 419 \end{cases}$$

現代の数学では簡単に解ける問題でも、昔は苦勞して解いていたんだなとしみじみ思いました。また、和算には主に4つの種類に分けられます。

- ①非常に桁数の多い計算、繰り返しの多い計算を必要としているもの。(鼠算、烏算など)
- ②一見遊戯性のみに見えるが数学的思考力を養う要素を持っているもの。(馬乗合など)
- ③クイズ的要素を主とするもの。(継子立など)
- ④古い遊びの類。(亀の占の事など)

和算とは日本古来の数学であり江戸時代に最も発展しました。

和算の元になったのは中国の数学です。16世紀に中国から「天元術」とそろばんが日本に伝えられ、和算はここから発達しました。

江戸時代の和算は庶民から武士までさまざまな人が日常的に楽しみました。和算の特徴として「算額」が在りました。算額(さんがく)とは額や絵馬に数学の問題や解法を記して、神社や仏閣に奉納したものです。算額は数学の問題が解けたことを神仏に感謝し、益々勉強に励むことを祈願して奉納されたと言われました。やがて、人の集まる神社仏閣を数学の発表の場として、難問や問題だけを書いて解答を付けずに奉納するものも現れ、その問題を見て解答を算額にしてまた奉納するといったことも行われました。この遺題継承という数学の発展方法は日本独自のものです。現在日本には1000個もの算額が残されています。次に和算を紹介していきます。

例1 油分け算

桶に10升の油が入っています。これを7升マスと3升マスの2つのマス使って、5升ずつに分けるには、どうすればよいでしょうか。

答1.

- ①10升マスから7升マスに6升移す。
- ②10升マスから3升マスによって7升マスの油をいっぱいにさセル。
- ③10升マスに7升マスの油を混ぜる。
- ④ほかの3升マスで10升マス(8)から3升とる。10升マスは5升になる。
- ⑤7升枡の油(3)と3升マスの油(2)を混ぜて5升にする。

例2 方陣 (詳細は「魔法陣とその入れ子」を参照して下さい)

9個の場所のある正方形のそれぞれの場所に、1から9までの数字を入れて、たて・よこ・斜めの列の

和が、すべて等しくなるように並べてください。

例3 鼠算

正月に、ねずみの父母が子どもを12匹生んで、親子とも14匹になるとします。この14匹のねずみが、2月には7組の父母として12匹ずつ生むと、全部で98匹となります。このように月に一度ずつ、親も子も孫もひ孫も12匹ずつ生むとしたら、12月には何匹になるでしょうか？

答 3. 27682574402 (2×7^{12})

例4 鳥算

999匹のカラスが999の浜辺で999回ずつ鳴いたら合計何回ないたでしょう。

また、鼠算、鳥算はそろばんの練習だったと言われています。

例5 盗人算

橋の下で盗人たちが盗んだ絹を分け合っている。

一人7反ずつとると8反あまり、8反ずつとると7反足りない。盗人は何人で何個の絹がある？

例6 馬乗合

4人が6里の道を馬3頭を均等に乘って行くにはどうしたらいいでしょう。但し、ひとつの馬には1人までしか乗れません。

例7 百五減算

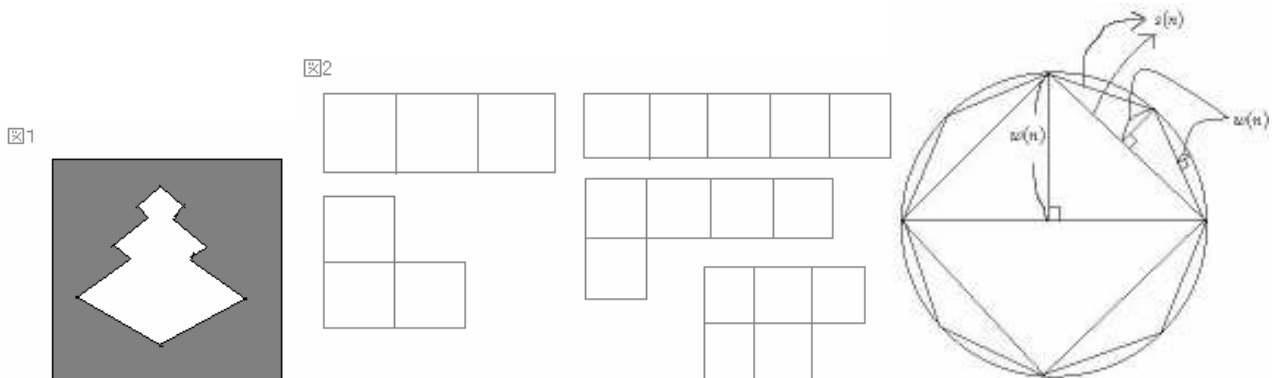
在る数から7を引けるだけ引いたあまりと5を引けるだけ引いたあまりと3を引けるだけ引いたあまりをいい、在る数を求めると言うものです。現在でもいろいろな書物で紹介されていて、とても有名です。

例8 裁ち合わせ

問1 正方形の折り紙を折って一回はさみを入れることで図1のようにしてください。

問2 図2のそれぞれの図をはさみで切って正方形に並び替えてください。

注：折る、重ねる、食べる、すりつぶす、直射日光を虫眼鏡で集めて燃やす、などの行為は禁止です。



3. エイトケン加速について

エイトケン加速とは反復法の1種で、 $f(x)=0$ の形の非線形方程式を $x=F(x)$ の形に変形して、 $F(x)$ の項差、項差の差を用いて、数列を作り、連続する2項の差が予定の微小値以下になったら、それを根とするものです。

関の円周率の求め方は直径1の円に内接する内接 n 角形の1辺の長さを $s(n)$ 、内接 n 角形の隣り合った2辺 ab と bc における b から ac に下ろした垂線と ac とが交わる点を d としたとき、 $bd=w(n)$ 、周の長さを $l(n)$ とします。(上右図を参照) $n=1$ のとき、 $s(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $w(n)=\frac{1}{2}$ です。すると、

$$w(2n) = (1 - \sqrt{1 - w(n)}) \div 2, \quad s(2n) = \sqrt{w(2n)}, \quad l(2n) = 2ns(2n)$$

となります。

関はこのように内接多角形の周の長さを求める計算の後、定周を求めようと次の加速計算を実行しまし

た。

$$\pi \approx 65536 \text{角の周} + \frac{(65536 \text{角の周} - 32768 \text{角の周})(131072 \text{角の周} - 65536 \text{角の周})}{(65536 \text{角の周} - 32768 \text{角の周}) - (131072 \text{角の周} - 65536 \text{角の周})}$$

そして 3,14159265359 を定周としました。

これを言い換えると

$$65536 \text{角の周} + \frac{131072 \text{角の周} - 65536 \text{角の周}}{1 - \frac{131072 \text{角の周} - 65536 \text{角の周}}{65536 \text{角の周} - 32768 \text{角の周}}} \text{となります。}$$

$l(n)$ の n を 32768 とすると、

$$l(2n) + \frac{l(4n) - l(2n)}{1 - \frac{l(4n) - l(2n)}{l(2n) - l(n)}} \text{となります。}$$

$\frac{l(4n) - l(2n)}{l(2n) - l(n)} = r$ とすると、

$$\begin{aligned} l(2n) + \frac{l(4n) - l(2n)}{1 - r} &= l(2n) + \{l(4n) - l(2n)\}(1 + r + r^2 + \dots) \\ &= l(2n) + \{l(4n) - l(2n)\} + \{l(8n) - l(4n)\} + \dots \end{aligned}$$

となります。

この和を r を公比とする無限等比級数の和として計算しようとしたものと考えられます。

関は $n = 32768$ の場合しか述べていませんが、もう少し小さい n の値も調べてみます。 $\frac{l(4n) - l(2n)}{l(2n) - l(n)}$ は

0.25 より少し大きいので、等比級数の和を $r = 0.25$ と $r = 0.251$ のときとで作ると、 $r = 0.25$ のときは 3.141592653589...、 $r = 0.251$ のときは 3.14159265359... となるので、関は加速計算の結果を 3.14159265359 としたと考えられます。

ちなみに、エイトケン加速の「エイトケン」とはロバート・グラント・エイトケン (Robert Grant Aitken, 1864 年 12 月 31 日 - 1951 年 10 月 29 日) というアメリカ合衆国の天文学者のことで、彼は二重星の体系的調査を行い、多くの重星を発見し、重星の標準的星表を作成しました。関が円周率の計算に用いた加速法はヨーロッパでは 1926 年にエイトケンが再発見するまでは知られていませんでした。なぜなら、江戸時代は日本は鎖国中だったため、関の発見は残念ながら世界に広まらなかったのです。もし日本が鎖国をしていなかったら「関加速」という名前でも世界中に知られていたかもしれません。

4. 参考文献

- [1] 『 π - π の計算 アルキメデスから現代まで一』 竹之内脩・伊藤隆 著 共立出版
- [2] 『再発見江戸の数学』 桐山光弘・歳森宏 著 B&T ブックス

$x^n + y^n = z^n$ の自然数解 $n = 2, 4, 3$ の場合について

高1 神谷俊輔

[1] フェルマーの最終定理

17世紀フランスの数学者フェルマーが、ディオファントスの著書「算術」中に書き残したメモによれば、次の通りである；

定理 1.1

3以上の自然数 n において、

$$x^n + y^n = z^n$$

の自然数解は存在しない。

フェルマーはその後、「私はこの驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを記すには狭すぎる」と続けている。この予想は350年以上の長きに渡り世界中の数学者を悩ませ続けてきたが、1995年遂に、イギリス、プリンストン大学のワイルズによって一般の自然数 n についての証明が与えられた。ここでは $n = 2, 4, 3$ の場合について考える。（ $n = 2$ の場合についてはその結果を $n = 4$ のときに使うので初めに扱う）

[2] ピタゴラス数

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (x, y, z \in \mathbb{N}, (x, y) = 1, 2 \mid x) \quad \dots \textcircled{1}$$

の解の組 (x, y, z) をピタゴラス数と呼ぶ。ピタゴラス数は、偶奇の異なり互いに素な自然数 a, b ($a > b$) を用いて

$$x = 2ab, y = a^2 - b^2, z = a^2 + b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

と書ける。

また (a, b) の値の組み合わせ、 (x, y, z) の値の組み合わせには1対1対応がある。

なお $(x, y) = 1$ としたのは x, y に1より大きい公約数 d があつたとき両辺 d^2 で割ればより小さい組み合わせが出来るわけであるので本質的には変わらず、そう設定してもよい。

(証) まず $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$ を示す。

y, z は奇数なので $\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}$ は整数。またこれらの最大公約数を d として d は $\frac{z-y}{2} + \frac{z+y}{2} = z, \frac{z-y}{2} - \frac{z+y}{2} = y$ の最大公約数であるから $d = 1$ 、つまり $\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}$ は互いに素である。また $\textcircled{1}$ より

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z-y}{2}\right)\left(\frac{z+y}{2}\right)$$

より、 $\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}$ は互いに素であることから、ある自然数 a, b を用いて

$$\frac{z-y}{2} = a^2, \frac{z+y}{2} = b^2$$

とおける訳である。（ $a > b, (a, b) = 1$ ）

また

$$a + b \equiv a^2 + b^2 = z \equiv 1 \pmod{2}$$

から a, b の偶奇は異なるので $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$ は示された。

次に $\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ を示す。

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2 \\
 &= z^2 \\
 &\quad (x, y, z \in \mathbb{N}, (x, y) = 1, 2|x)
 \end{aligned}$$

$(x, y) = d$ とすれば $d|z$ であるので

$$d|y = a^2 - b^2, \quad d|z = a^2 + b^2$$

よって $d|2a^2$, $d|2b^2$ である. $(a, b) = 1$ なので $d = 1, 2$ であるが, $d|y$ かつ, y は奇数であることから $d = 1$. つまり $(x, y) = 1$.

また y, z が与えられたとき a^2 と b^2 , つまり a と b の組み合わせは一意的に決まる. 逆もまた然りである.

//

[3] $n = 4$ のとき

オイラーによる証明である. 少し強い場合を証明する.

定理 3.1

方程式

$$x^2 + y^2 = z^4$$

は自然数解を持たない.

(証) まず先程と同様の理由において $(x, y) = 1$ とおいてもよいので, x, y の少なくとも一つは奇数である. x, y の両方奇数と仮定すると

$$x^4 + y^4 = z^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となり不適. よって x, y の偶奇は異なる.

x を偶数とすると [2] の結果から, 偶奇の異なり互いに素な自然数 a, b ($a > b$) を用いて

$$x^2 = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2$$

とおける. a を偶数とすると b は奇数であるので

$$y^2 \equiv 0 - 1 = -1 \pmod{4}$$

となり不適. よって a は奇数, b は偶数である. $b = 2b'$ とおくと $x^2 = 2ab = 4ab'$ であるので

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = ab'$$

これと $(a, b') = 1$ より, 偶奇の異なり互いに素な自然数 c, d ($c > d$) を用いて

$$a = c^2, \quad b' = d^2$$

とかけるので

$$y^2 = a^2 - b^2 = c^4 - 4d^4$$

$$\therefore (2d^2)^2 + y^2 = (c^2)^2$$

$2d^2, y, c^2$ は共通因数を持たない. 再び [2] の結果から, 互いに素な自然数 e, f を用いて

$$2d^2 = 2ef, \quad c^2 = e^2 + f^2$$

とかける. ここでまた, e, f は互いに素なので

$$d^2 = ef$$

より互いに素な自然数 g, h を用いて

$$e = g^2, f = h^2$$

とかけるので

$$g^4 + h^4 = c^2$$

このようにして、無限に小さな数において $x^2 + y^2 = z^4$ を満たす数が存在する。つまり初めに x, y, z を自然数としたが、上の操作を繰り返すことによって自然数でない解が生まれてしまう。これは矛盾である。つまり題意は示された。

//

このように、題意と同じ式をより小さい数で示し、無限に小さくなることを利用し矛盾を導く手法をオイラーの無限降下法という。

[4] $n=3$ のとき①～オイラーの誤った証明

$n=4$ のときと同じく、 $n=3$ のときも、オイラーがゴールドベルクに送った手紙の中で無限降下法による証明がなされた。しかし実際、その証明には欠陥があった。下にオイラーによる証明を示す。

(証) ここでは x, y, z は $xyz \neq 0$ を満たす整数とする。

$$x^3 + y^3 = z^3$$

のとき、 $(x, y) = 1$ と置いてもよいので、 x, y は両方奇数、または偶奇が異なる。このとき、 x, y を共に奇数としてよい。というのも、例えば x を偶数、 y を奇数とすれば

$$x^3 = z^3 - y^3 = z^3 + (-y)^3$$

のように結局 (奇数)³ + (奇数)³ の形に帰着できるからである。このとき z は偶数。

x, y を共に奇数と仮定したので、 x, y の和、差ともに偶数であるから

$$\frac{x+y}{2} = a, \quad \frac{x-y}{2} = b \quad (a, b \in \mathbb{Z}) \text{ のようにおけば}$$

$$x = a+b, y = a-b$$

と表せる。また $(x, y) = 1$ より $(a, b) = 1$ であることも分かる。代入して

$$\begin{aligned} z^3 &= x^3 + y^3 \\ &= (a+b)^3 + (a-b)^3 \\ &= 2a(a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

z は偶数より、 z^3 は 8 の倍数であるから、右辺を 8 で割った値 $\frac{a(a^2 + 3b^2)}{4}$ も整数、

それも立方数である。 $(a, b) = 1$ より a, b の偶奇が異なることから、 $a^2 + 3b^2$ は奇数で

あるので $\frac{a(a^2 + 3b^2)}{4}$ が整数であるためには a は 4 の倍数でなければならない。

ここからは $(a, a^2 + 3b^2)$ の値を考える。 $(a, a^2 + 3b^2) = g$ として、 $g = 1$ か $g > 1$ である。 $g = (a, a^2 + 3b^2) = (a, 3b^2)$ であり、また、 $(a, b) = 1 \Rightarrow (a, b^2) = 1$ であることもあわせて考えると、 $g > 1$ のとき、 a は 3 の倍数でなければならない。つまり a が 3 の倍数でないとき $g = 1$ 、 a が 3 の倍数のとき $g > 1$ であるのでこれを元に場合分けする。

i) $g = 1$ のとき

このとき a は 3 の倍数でなく、 $\left(\frac{a}{4}, a^2 + 3b^2\right) = 1$ である。また

$$\frac{a}{4}(a^2 + 3b^2) = \left(\frac{z}{2}\right)^3$$

より、 $\frac{a}{4}, a^2 + 3b^2$ はどちらも立方数である。よって $t \in \mathbb{Z}$ を用いて $t^3 = a^2 + 3b^2$ とかける。ここで、 $\sqrt{-3}$ という虚数を考えて

$$\begin{aligned} t^3 &= a^2 + 3b^2 \\ &= (a - \sqrt{-3}b)(a + \sqrt{-3}b) \end{aligned}$$

先程と同様の理由で、 $c, d \in \mathbb{Z}$ として

$$\begin{aligned} a - b\sqrt{-3} &= (c - d\sqrt{-3})^3 \\ a + b\sqrt{-3} &= (c + d\sqrt{-3})^3 \end{aligned}$$

とおけるわけであり、これより

$$a^2 + 3b^2 = (c^2 + 3d^2)^3$$

でこれは立方数である。これらより

$$\begin{aligned} a &= c(c^2 - 9d^2) \\ b &= 3d(c^2 - d^2) \end{aligned}$$

である。 b は奇数なので d も奇数であって、 $c^2 - d^2$ も奇数であることから、 c は偶数である。

さて、 $a = c(c^2 - 9d^2) = c(c - 3d)(c + 3d)$ を見出したが、さらに $\frac{1}{4}a$ つまり $2a$ が立方数である

ことが必要である。 $2a = 2c(c - 3d)(c + 3d)$ なのでこの右辺も無論立方数でなければならない。ここで、 a が 3 で割り切れないことより、 c は 3 で割りきれない。これと c が偶数であることを合わせて、 $2c, c - 3d, c + 3d$ はそれぞれ共通因数を持たないことが分かる。したがってこれらの積も立方数であるので各々が立方数であり

$2a = e^3, c - 3d = f^3, c + 3d = h^3$ ($e, f, h \in \mathbb{Z}$) のようにおけば

$$e^3 = f^3 + h^3$$

これより、無限降下法で $g = 1$ の場合が示された。

ii) $g > 1$ のとき

このとき a は 3 の倍数であるので $a = 3a'$ とおくと

$$\frac{a}{4}(a^2 + 3b^2) = \frac{3}{4}a'(9a'^2 + 3b^2) = \frac{9}{4}a'(3a'^2 + b^2)$$

ここで $3a'^2 + b^2$ は 2 でも 3 でも割りきれず、また a' は偶数であるから

$$\left(\frac{9}{4}a', 3a'^2 + b^2\right) = 1$$

よってこの二数はどちらも立方数でなければならない。

さて、 $3a'^2 + b^2$ を i) と同様に変形することによって

$$\begin{aligned} b &= c(c^2 - 9d^2) \\ a' &= 3d(c^2 - d^2) \end{aligned}$$

とかける。 b が奇数なので c は奇数でなければならないし、 d は偶数でなければならない。

ここで、先程見たとおり $\frac{9}{4}a'$ は立方数でなければならない。ここで

$$\frac{9}{4}a' \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{3}a' = 2d(c^2 - d^2) = 2d(c - d)(c + d)$$

が立方数である。ここからは先程 $g = 1$ の場合と同様に、この 3 因数が互いに素であることから

この3因数はすべて立方数でなければならない。つまり
 $2d = e^3, c - d = f^3, c + d = h^3 \quad (e, f, h \in \mathbb{Z})$ のようにおけば

$$e^3 = f^3 + h^3$$

したがって無限降下法により $g > 1$ の場合についても題意は示された。

//

無事に証明が終わったと思われた方も多いかも知れないが、i)の波線部に着目して頂きたい。オイラーは、ここで「先程と同様の理由で」、つまり互いに素な二数の積が立方数ならば、その二数は両方とも立方数である、という内容を述べているが、そもそも $a - b\sqrt{-3}$ と $a + b\sqrt{-3}$ が互いに素かどうかわからないし、その互いに素の概念も定義されていないので極めて曖昧である。更には、 $a + b\sqrt{-3}$ の形をした数の世界では素因数分解(素元分解)の仕方が一通りではない。というのも、例えば4ならば

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 - \sqrt{-3})(1 + \sqrt{-3})$$

のように二通りに素元分解されてしまう。さすがのオイラーも大嘘をついてしまったのだ。この欠陥を補う手立てとなるものを次の章で取り上げる。

[5] $K(\sqrt{-3})$ の整数

オイラーの証明の欠陥を補うには二次体 $K(\sqrt{-3})$ の整数の知識が必要になる。そこでこの章でそれを説明する。ちなみに $K(\sqrt{-3})$ の整数の集合は素元分解の一意性が成り立つ環(ガウス環)であるが、ここでは環の概念の説明は割愛する。

定義 5.1 $K(\sqrt{-3})$ の整数

ω を1の三乗根として、

$$x + y\omega \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

として表せる数を $K(\sqrt{-3})$ の整数と呼ぶ。

この章では $K(\sqrt{-3})$ の整数を単に「整数」と呼ぶことにする。またギリシャ文字を整数、ローマ字を有理整数として議論を進める。

初等整数論と同様に、

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$$

の商 γ が整数のとき α は β の**倍数**、 β は α の**約数**と定義する。

ここから初等整数論には登場しない概念を導入する。整数 $\alpha = x + y\omega$ において $\bar{\alpha} = x + y\bar{\omega}$ とすると α のノルム $N\alpha = \alpha\bar{\alpha} = (x + y\omega)(x + y\bar{\omega}) = x^2 - xy + y^2$ を定義する。ノルムは有理整数であって、 $\alpha = \beta\gamma$ とすると $N\alpha = N\beta \cdot N\gamma$ であることも導ける。また $N\varepsilon = 1$ なる ε を単数とし、

$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon$ となるような α, β を互いに同伴数と定義する。単数は具体的には $\varepsilon = x + y\omega$ とおくと

$N\varepsilon = x^2 - xy + y^2 = 1$ なる x, y を求めればよい。この式から $(2x - y)^2 + 3y^2 = 4$ であるので $y^2 = 0, 1$ から複号同順として $(x, y) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ の組み合わせがある。つまり、単数 ε の値として考えられるのは

$$\pm 1, \pm \omega, \pm(1 + \omega)^2 = \mp \omega^2$$

$N\alpha$ が素数であれば α は単数を除く整数の積で分解することができない。というのも $\alpha = \beta\gamma \dots$ とすれば $N\alpha = N\beta \cdot N\gamma \dots$ であつ $N\alpha$ が素数なので例えば $\beta = \alpha$ となり他の数はすべて単数に等し

い。このような α を $(K(\sqrt{-3}))$ の整数中の**素数**と定義する。

これらはすなわち1の六乗根である。単数の概念は有理整数の世界では+と-の区別にあたりと考えてよいだろう。

次に除法に関する基本定理を証明したい。初等整数論でいう「割り算の公式」である。

定理 5.1

任意の整数 α, β ($\beta \neq 0$) において

$$\alpha = \beta\kappa + \rho, \quad |\rho| < |\beta|$$

なる κ, ρ が存在する。

(証) 整数を複素数平面上の点で表すことを考える。するとそれは下の図のように 120° の角を持つひし形を基本とする格子の点である。

よって $\frac{\alpha}{\beta}$ はあるひし形に属するので、そのひし形の頂点から1より小さい距離にあることが分かる。その頂点を κ とすると

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - \kappa \right| < 1$$

$\alpha - \beta\kappa = \rho$ とおくと

$$\left| \frac{\rho}{\beta} \right| < 1 \Rightarrow |\rho| < |\beta|$$

から示された。

//

これが成り立つ以上は二整数 α, β にユークリッドの互助法を行うことが出来る。すなわち

$$\alpha = \kappa\beta + \beta_1, |\beta_1| < |\beta|, \quad \beta = \kappa_1\beta_1 + \beta_2, |\beta_2| < |\beta_1|, \quad \dots$$

これを見ると $|\beta| > |\beta_1| > |\beta_2| > \dots$ したがって $N\beta > N\beta_1 > N\beta_2 > N\beta_3 > \dots$ であってこれらは正の有理数であるから、剰余はいつか0になるので、ある自然数 n に対し $\beta_{n-1} = \kappa\beta_n$ となるまで続けることが出来る。

よって、もとを辿っていけば β_n は α, β の公約数であることが分かる。また α, β の公約数は β_1, β_2, \dots の約数、つまり β_n の約数である。このような β_n を α, β の最大公約数といい、 (α, β) で表す（「最大」というのはもちろん絶対値のことである）。

初等整数論と同様に考えて $(\alpha, \beta) = \delta$ とすると

$$\alpha\xi + \beta\eta = \delta$$

また α, β が単数以外に公約数を持たないとき、 α, β は互いに素であるという。このとき $\alpha\gamma$ が β で割り切れるときには γ は β で割り切れることも示される。

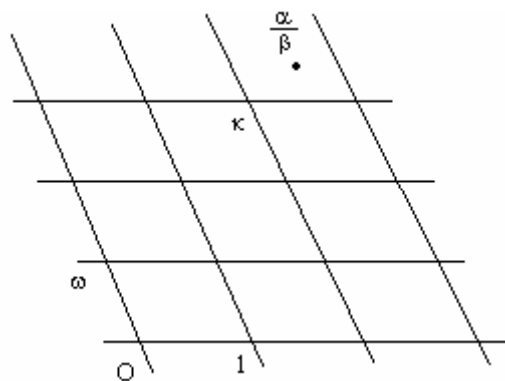
よって二つ以上の整数の積 $\alpha\beta\gamma \dots$ が素数 π で割り切れるとき π は $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ のうち少なくともひとつで割り切れる。このことから素因数分解の一意性を示すことが出来る。

$$\alpha = \pi\pi'\pi'' \dots = \kappa\kappa'\kappa'' \dots$$

で $\pi, \pi', \pi'' \dots$ と $\kappa, \kappa', \kappa'' \dots$ を素数とすれば $\kappa\kappa'\kappa'' \dots$ が π で割り切れるので、その中の一つ、たとえば κ が π で割り切れる。よって $\kappa = \varepsilon\pi$ とおくと κ も素数であるから ε は単数であるので

$$\varepsilon\pi'\pi'' \dots = \kappa'\kappa'' \dots$$

これと同様に κ' が例えば π' の相伴数であるから $\kappa' = \varepsilon'\pi'$ のようにおけて、



で割り切れる。よって $\kappa = \varepsilon\pi$ とお

$$\varepsilon\varepsilon'\pi''\dots = \kappa''\dots$$

これを繰り返して行けば両側の素因数が同時になくなり、 $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\dots = 1$ となるのである。すなわち $\alpha = \pi\pi'\pi''\dots = \kappa\kappa'\kappa''\dots$ においては、因数 $\pi, \pi', \pi''\dots$ は $\kappa, \kappa', \kappa''\dots$ と単数因子によってのみ異なり得る。ここに二次体 $K(\sqrt{-3})$ の整数の上で素因数分解の一意性が示された。

[6] **n = 3 のとき②～完全な証明**

結局次の定理を証明すればよい；

定理 6.1

$(a, b) = 1$ なる整数 a, b において、 $a^2 + 3b^2$ が奇数でしかも立方数ならば

$$a = c(c^2 - 9d^2)$$

$$b = 3d(c^2 - d^2)$$

なる整数 c, d が存在する

(証) $a^2 + 3b^2 = (a - b\sqrt{-3})(a + b\sqrt{-3})$

$\alpha = a - b\sqrt{-3}, \bar{\alpha} = a + b\sqrt{-3}$ とおく。 α と $\bar{\alpha}$ の公約素元があるとしてそれを π とおく。すると $\pi|2a$ かつ $\pi|2b\sqrt{-3}$ である。 $\pi|2$ と仮定すると $a^2 + 3b^2$ が偶数になるから不適。つまり $\pi|a$ 。これと $(a, b) = 1$ から $\pi|\sqrt{-3}$ 。よって $a^2 + 3b^2$ は 3 で割り切れるので、 $a = 3a'$ とおけば $a^2 + 3b^2 = 3(b^2 + 3a'^2)$ 。これが立方数であるので $b^2 + 3a'^2$ もまた 3 で割り切れるはずである。しかしこれでは b が 3 の倍数となり $(a, b) = 1$ に反する。これにより α と $\bar{\alpha}$ に公約素元はない、つまり互いに素であることが分かった。

$\alpha\bar{\alpha}$ が立方数で α と $\bar{\alpha}$ が互いに素だから $K(\sqrt{-3})$ の整数の集合がガウス環であることにより、 ε を単数つまり $\varepsilon = \pm\omega^k$ ($k = 0, 1, 2$)、 $p, q \in Z$ として

$$\alpha = \varepsilon(p + q\omega)^3$$

と表わせる。

$$(p + q\omega)^3 = (p\omega + q\omega^2)^3 = (-p + (p - q)\omega)^3$$

なので p, q が共に奇数のときは $-p$ を p 、 $p - q$ を q と考えることによっていずれかが偶数であるとしてよい。 q を偶数とすると

$$\alpha = \varepsilon(c + d\sqrt{-3})^3$$

と表せる。 $c^2 + 3d^2$ は奇数かつ α も $K(\sqrt{-3})$ の整数の集合の要素であるから $\varepsilon = \pm 1$ が分かる。 p が偶数の場合にも同様な方法で $\varepsilon = \pm 1$ を得る。結局

$$\alpha = (e + f\sqrt{-3})^3$$

という形に表せるので展開して実部と虚部を比較して、題意が示された。

//

[7] 参考文献

1. 「数論入門」－G. H. ハーディ, E. M. ライト著 シュプリンガー数学クラシックス
2. 「初等整数論講義」－高木貞治著 共立出版
3. 「フェルマーの大定理 整数論の源流」－足立恒雄著 筑摩書房
4. 「初等整数論」－遠山啓著 日本評論社

ここまで読んでいただきありがとうございました。来年は $n = 5, 7$ などの証明について考察してみたいと思います。

共円

中 2 猪苗代大路 小澤創 外園晋夫 松崎舜
高 2 四方紘太郎 (図や補足説明など)

1. 共円とは

1.1 数学用語としての「共円」

「共円」とは、ある 4 点があり、その全てを通る円があればその 4 点を共円であるといいます。例として、 $\angle ABD = \angle ACD$ のとき、4 点 A, B, C, D は共円であり、四角形 $ABCD$ は円に内接します。

1.2 ゲームとしての「共円」

①ルール

オセロ盤などの格子状の盤に 2 人以上の人が順番に格子点上に 1 つずつ駒をおく。駒はオセロの駒や碁石で代用することが多い。前者が置いた駒を必ず用いて 4 個以上の点が共円になれば発見者（直前に駒を置いた人を除く）は共円を指摘する。

②ゲーム進行

(1) プレイヤーが交互に駒を置く。

(2) 次に置くプレイヤー以外は共円がないか探す。（この時重要なのが、直前に置いた駒以外によって為される共円を発見しても宣言も除外もしないことである。）

(3) 共円をプレイヤーが発見した場合、発見したプレイヤーが叫ぶ（?）。その駒（最終）を置いたプレイヤーは脱落する。そして、その共円となった駒は取り除く。こうして、最後まで残った人が勝ち。

2. 共円に関する諸定理とテクニック

共円に関する定理としては、円周角の定理、方べきの定理、トレミーの定理、内接四角形の定理などがあります。ここではそれらの簡単な証明を与えて実戦ではどのくらい効果があるのかという事も見て行きたいと思います。

円周角の定理

円周角は同じ弧に対する中心角の半分である。また、同じ円、または等しい円において、同じ弧または等しい弧に対する円周角は等しく、等しい円周角に対する弧は等しい。

証明

まず、円周角が同じ弧に対する中心角の半分であることを証明する。

中心角 $\angle AOB < 180^\circ$ の場合について証明すれば、中心角度が $180^\circ \leq \angle AOB \leq 360^\circ$ の場合も同様に証明できる。

中心 O が $\angle APB$ 内にあるときを調べれば残りのケースは同様に証明できるので割愛する。

右図のように P, O を結び、直径 PQ を引くと

$$\angle QOA = 2\angle QPA \dots \textcircled{3}$$

$$\angle QOB = 2\angle QPB \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{より} \quad \angle QOA + \angle QOB = 2(\angle QPA + \angle QPB)$$

$$\text{よって、} \quad \angle AOB = 2\angle APB$$

よって円周角 $\angle APB$ は同じ弧 AB に対する $\angle AOB$ の半分である。 \square

方べきの定理

円に内接する四角形 $ABCD$ で対角線 AC, BD の交点を P とする。このとき、

$$AP \times PC = BP \times PD$$

証明

$\triangle ABP$ と $\triangle DCP$ において、円周角の定理より、

$$\angle ABP = \angle DCP \dots \textcircled{1}$$

$$\angle BAP = \angle CDP \dots \textcircled{2} \text{である。}$$

①、②より、 $\triangle ABP$ と $\triangle DCP$ は相似である（二角相等）。

なので、 $AP : BP = CP : DP$ となる。

外項の積と内項の積は等しいので、 $AP \times PC = BP \times PD$ 。 \square

トレミーの定理

円に内接する四角形 $ABCD$ で

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

証明

図のように線分 BC 上の点 E を $\angle BAE = \angle CAD$ となるように採る。これと所謂円周角定理から (同一弧 AD の円周角で) $\angle ABE = \angle ACD$ であるから、二角が等しいので $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ 。従って $AB : AC = BE : CD$ 。よって

$$AB \times CD = AC \times BE \dots (1)$$

一方

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABD + \angle CAD = \angle ABE + \angle BAE = \angle AED$$

(最後は $\triangle ABE$ の外角である事を用いた)

であり、円周角の定理から $\angle BCA = \angle EDA$ であるから、二角相等により $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 従って $BC : DE = AC : AD$ 。だから

$$BC \times AD = AC \times DE \dots (2)$$

(1)+(2)から題意は成り立つ。□

内接四角形の定理

円に内接する四角形 $ABCD$ で

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$$

証明

四角形 $ABCD$ に外接する円の中心を O とおく。なお、下記の $\angle AOC$ は D 側の角度を表わしている。円周角の定理より、

$$360^\circ - \angle AOC = 2\angle ADC \dots \textcircled{1}$$

$$\angle AOC = 2\angle ABC \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、

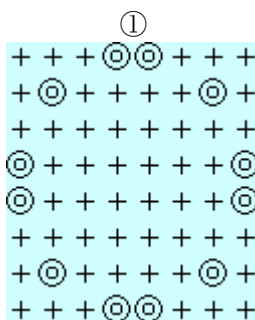
$$2(\angle CDA + \angle ABC) = 360^\circ$$

よって、 $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ □

このような定理があるのですが、実戦で使える定理は限られたものになります。円周角の定理や方べきの定理は殆ど使えません。実戦で使えるのが内接四角形の定理です。また、ここには載っていませんが、中心を予め設定して同距離にある4点を見つける、という方法も有用です。3.には極めて特殊な定石も載っていますが、そのような定石は実戦にも出にくいのです。覚えるというのが手っ取り早い方法だと思いますが、基礎的な定石と等脚台形を見破る程度ができれば、十分実戦に対応できるというのが現状です。また、このゲームに特化するために、既に盤に十数個おかれているコマから共円を見つける共円判定というものもあります。

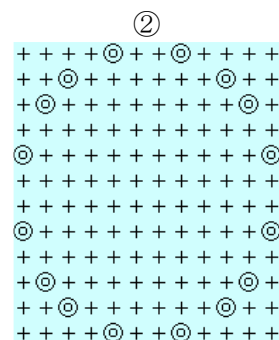
3. 共円の定石

9×9の盤でプレイする時に出現する共円のうち正方形と等脚台形を除いた定石は次の16個です。半径が大きくて中心が格子点のものは中心が■になっています。



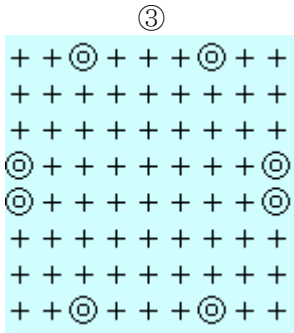
$$\text{半径} : \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$$



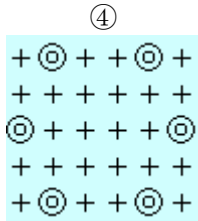
$$\text{半径} : \frac{\sqrt{130}}{2}$$

$$3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$$



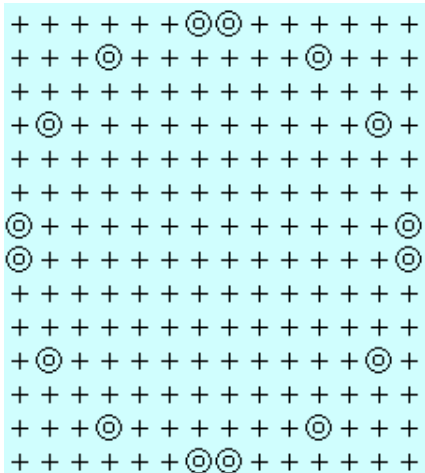
半径： $\frac{\sqrt{65}}{2}$

$$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$$



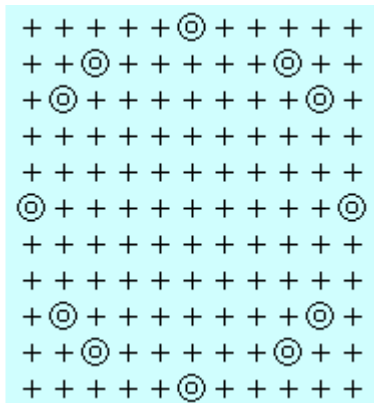
半径： $\frac{5}{2}$

$$0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$$



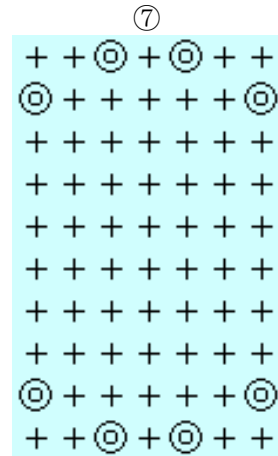
半径： $\frac{\sqrt{170}}{2}$

$$1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$$



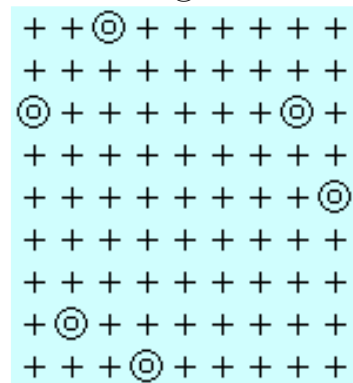
半径：5

$$0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$$



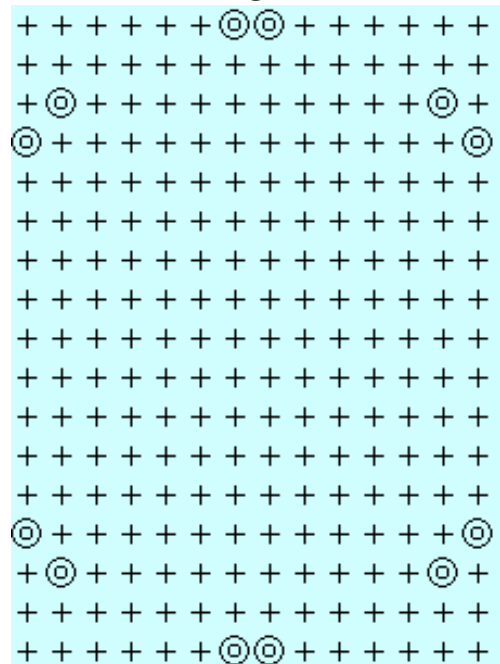
半径： $\frac{\sqrt{85}}{2}$

$$2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2$$



半径： $\frac{5\sqrt{26}}{6}$

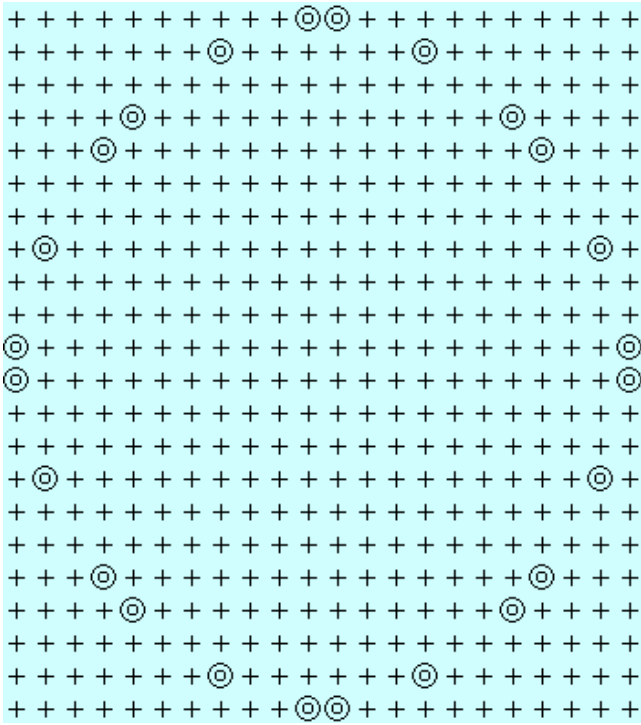
$$11^2 + 23^2 = 17^2 + 19^2 = 5^2 + 25^2$$



半径： $\frac{\sqrt{290}}{2}$

$$1^2 + 17^2 = 11^2 + 13^2$$

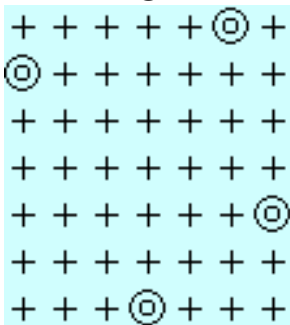
⑩



半径： $\frac{5\sqrt{26}}{2}$

$11^2 + 23^2 = 17^2 + 19^2 = 5^2 + 25^2$

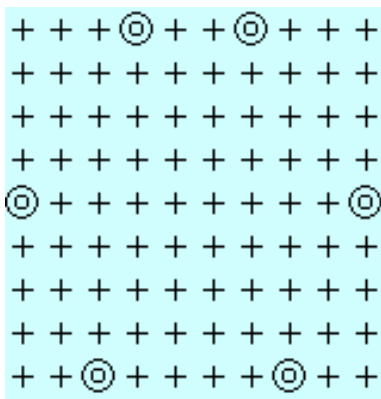
⑪



半径： $\frac{\sqrt{2210}}{14}$

$37^2 + 29^2 = 1^2 + 47^2 = 43^2 + 19^2 = 41^2 + 23^2$

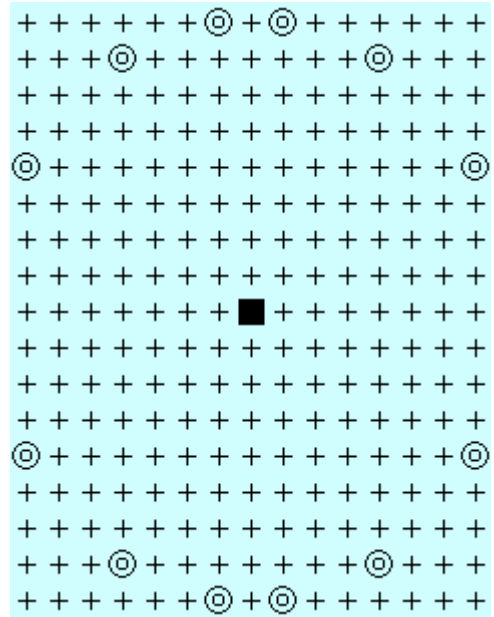
⑫



半径： $\frac{5\sqrt{13}}{4}$

$10^2 + 15^2 = 1^2 + 18^2 = 6^2 + 17^2$

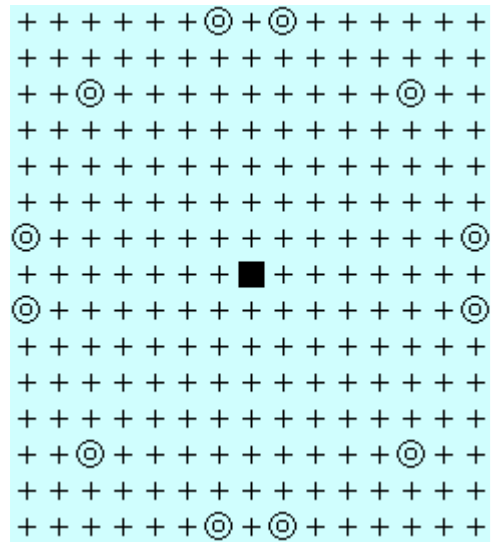
⑬



半径： $\sqrt{65}$

$1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$

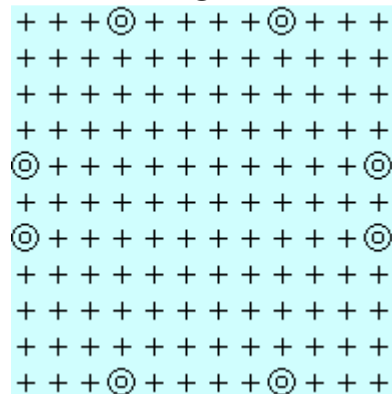
⑭



半径： $5\sqrt{2}$

$5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2$

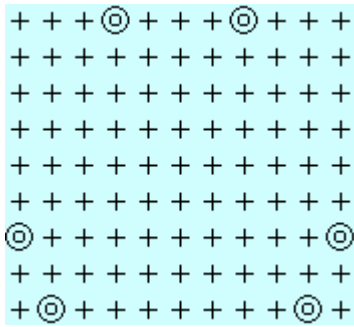
⑮



半径： $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$2^2 + 11^2 = 10^2 + 5^2$

⑩



半径： $\frac{5\sqrt{17}}{4}$

$$5^2 + 20^2 = 13^2 + 16^2 = 8^2 + 19^2$$

ここで、半径の下に書いてある 2 乗の和の式について補足しておきます。このような共円の定石を見る事で、ある整数を何通りかで 2 つの平方数の和にする事ができます。例えば、

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$$

というようにです。これに関係する有名な等式があります。

Lagrange の恒等式

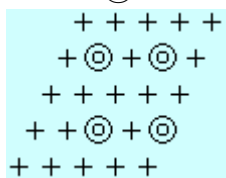
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

証明は展開するだけですので省略します。要は 2 つの平方数の和を表せる整数 2 つを掛け合わせたものはまた、2 つの平方数の和で表せる、ということです。例えば $(a, b, c, d) = (3, 2, 2, 1), (3, 2, 1, 2)$ をそれぞれ代入する事で、先程の $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ が導かれます。このように、一見幾何学的なこのゲームの中にも、整数論的性質が隠れているのです。

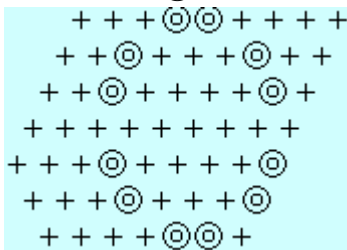
3. 三角形型共円

数学研究会は、この共円を拡張させて、正六角形の盤でプレイする共円を考え出しました。定石を全て挙げるには紙面が足りないので代表的なものだけ挙げます。皆さんもここにはない定石を見つけてみてください。以下定石を挙げます。

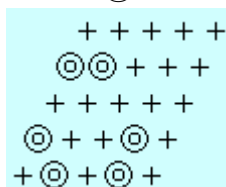
①



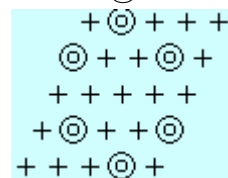
②



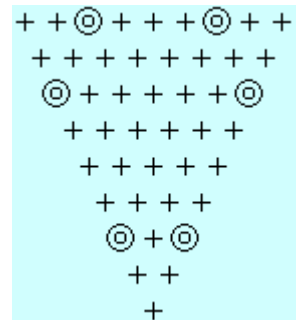
③



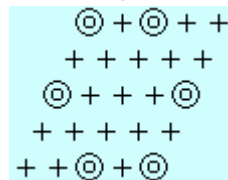
④



⑤



⑥



魔方陣とその入れ子

高1 久良尚任

1. 魔方陣・汎魔方陣についての基本事項

魔方陣については、有名な形なのでご存知でしょう。いずれのたて列、よこ列、及び対角線にならんだ数字の和(定和といいます)が同じになるような $N \times N$ に配列された数字のことです。またこれを N 方陣、あるいは、 N 次の方陣とも呼びます。下が3方陣(図A)、4方陣(図B/図C)の例です。

| | | |
|-----|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |
| ☒ A | | |

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |
| ☒ B | | | |

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 1 | 8 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 3 | 6 |
| ☒ C | | | |

| | | | |
|-----|---|---|---|
| | + | * | X |
| Y | * | + | Z |
| * | | | + |
| + | | | * |
| ☒ D | | | |

各行、列、対角線の和は3方陣が15、4方陣が34となっています。 N 方陣において、 k 列目の数の和を S_k とすると、当然 $S_1 = S_2 = \dots = S_N$ となります。他方、 $S_1 + S_2 + \dots + S_N$ は $1 \sim N^2$ の総和になるので、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1+2+\dots+N^2}{N} \\ &= \frac{N^2+1}{2N} \\ &= \frac{N^3+N}{2} \end{aligned}$$

となり、定和の値は $\frac{N^3+N}{2}$ と分かります。

図Dを見てください。「枠からはみ出したら反対側に移動する」ということにすると、Xの右下のマスを定義することができます。つまりそのマスはZの左にあることになり、はみ出してしまいます。そこで左端に移動してYをXの右下と定義できます。

すると4つの*や+は「ななめ列」ととることができます。ななめ列は対角線も含めて8つあります。各ななめ列にある N 個の数の和も等しい場合「汎魔方陣」といいます。図Aや図Bは汎魔方陣ではありませんが、図Cは汎4方陣です。

2. ラテン方陣

魔法陣の話をするときに重要となるのがラテン方陣です。 N 次ラテン方陣とは、 $N \times N$ に並べたマスに、 N 個ずつ0から $N-1$ までの数を入れたものです。ただし、同じ列・行に同じ数字はないようにします(数独はこの方陣をもとにしています)。図E・図Fが 4×4 (4次)のラテン方陣の例です。

EとFの同じ位置の数字を重ね合わせて2つ1組にすると、図Gのようになりますが、同じ2数の組み合わせはなく、全ての (α, β) の組が存在します($0 \leq \alpha, \beta < N$)。このような2のラテン方陣を「直交するグレコ・ラテン方陣」と言います。

図Gの“ a, b ”を“ $a \times N + b + 1$ ”に置き換えると図Hになります。この方陣は各行・各列とも和が等しくなっています。これは、任意の列の値を“ a_1, b_1 ”, ..., “ a_N, b_N ”として、

$$\begin{aligned} (Na_1 + b_1 + 1) + \dots + (Na_N + b_N + 1) &= N(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N) + N \\ &= N\{0 + \dots + (N-1)\} + \{0 + \dots + (N-1)\} + N \\ &= (N+1) \left\{ \frac{(N-1)N}{2} \right\} + N \\ &= \frac{N^3 - N}{2} + N = \frac{N^3 + N}{2} \end{aligned}$$

となり定和に等しいからです。

| | | | |
|-----|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |
| ☒ E | | | |

| | | | |
|-----|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |
| ☒ F | | | |

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 0,1 | 1,0 | 2,3 | 3,2 |
| 2,0 | 3,1 | 0,2 | 1,3 |
| 1,2 | 0,3 | 3,0 | 2,1 |
| 3,3 | 2,2 | 1,1 | 0,0 |
| ☒ G | | | |

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 2 | 5 | 12 | 15 |
| 9 | 14 | 3 | 8 |
| 7 | 4 | 13 | 10 |
| 16 | 11 | 6 | 1 |
| ☒ H | | | |

| | | | |
|------|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 0 |
| ☒ F' | | | |

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 4 | 5 | 10 | 15 |
| 9 | 16 | 3 | 6 |
| 7 | 2 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 8 | 1 |
| ☒ I | | | |

さらに、同じ数字の組み合わせは無いので、1から N^2 までの全ての数字が入るのは明確です。しかし、図Hは対角線の和は異なっています。2つの直交するグレコラテン方陣の対角線の和が $\frac{N(N-1)}{2}$ になる場合、対角線の和も一致させることができます。例えば図Fの1と3を入れ替えたら図F'になります。F'も当然ラテン方陣の条件を満たします。さらにEとFが直交しているので、EとF'も直交しています（“t,0”と“t,3”が入れ替わるのみ）。よってEとF'から方陣を作ると図Iができます。E,F共に対角線の和が6なので、図Iは魔方陣になっています。次章からは魔方陣の有名な作成方法を述べます。

3-A. 魔法陣の作り方（Nが奇数の場合、例はN=5）

Nが奇数の場合の作り方は非常に有名です。最初に図Jのように1を最上列の中央におき、そこから右上に順々に次の数字を書いていきます。「枠からはみ出したら反対側に移動する」ので2から5は図のようになります。6のように、書くべき場所にすでに数字（ここでは1）が書かれているときは、前の数の1つ下に書いて作業を続行します。

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 5 | 7 | | |
| 4 | 6 | | | |
| | | | | 3 |
| | | | 2 | |
| ☒ J | | | | |

| | | | | |
|-----|----|----|----|----|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |
| ☒ K | | | | |

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| ☒ L | | | | |

| | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| ☒ M | | | | |

図Jは7まで描いた図で、完成形は図Kです。

《これが魔方陣をなすことの説明》

図Kにおいてrという数が書かれているときに、 $r = pN + q + 1$ となるような、0以上N未満のp,qを求め、それぞれ図L,Mのrが書かれているところとおなじ位置に書きます。すると、ラテン方陣の図E・図F'から魔方陣(図I)を作ったように、Kから2つのラテン方陣(図L,M)を作ることができます。当然、LとMにおける数字の組み合わせは全て異なります。これを魔方陣Kの補助方陣と言います。なお、補助方陣がラテン方陣である必要はありません。

Lは0が中央上とそこから左下に向かったななめ列に書かれ、0の下には1,2,...,N-1が順にかかれます。Mは0が中央上とその左下の下、さらにその左下の下、……に書かれていて、やはり0の下には1からN-1までが順に書かれています。よってLもMも縦横は0からN-1が一つずつ存在します(①)。

Lの／方向の対角線は全て0とN-1の平均である $\frac{N-1}{2}$ なので、その和は $\frac{N(N-1)}{2}$ になり(②)、Mの／方向の対角線は1からN-1が全てそろっています(③)。なぜならMに重複した数字があるならば、Lの対応するマスがすべて同じ数字なので、「組み合わせが全て異なる」という前提に反するからです。図Lの\方向の対角線は、右に行くと数字が1つ上にずれるので、右下の数字は2増えます(ただし、 $\text{mod } N$ の世界で考えています)。Nは奇数で2と互いに素なので、0からN-1まで全てそろっています(④)。図Mは同様に3つずれるので、Nが3の倍数でない場合は全ての数字があります(⑤-A)。3の倍数の場合は $\text{mod } 3$ で中央の $\frac{N-1}{2}$ と合同な数が3つずつ存在します。 $\frac{N-1}{2}$ は中央の数なので当然対角線上の数の平均となり、この場合も和は $\frac{N(N-1)}{2}$ になります。(⑤-B)

①～⑤の事実より、このLとMは対角線の和も等しい直交するラテン方陣なので、Kは魔方陣であることが分かります。

3-B. 魔法陣の作り方(Nが4の倍数の場合、例はN=8)

Nが4の倍数のときの魔方陣の作り方は、まず1~N²までを全て羅列し、全体を16分割します(図O)。

四隅と中央の8ブロックにある全ての数aを N^2+1-a なる数と入れ替えるだけです(図P)。ここでは1と64、2と63、7と58などが入れ替わっています。

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

☒ O

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 64 | 63 | 3 | 4 | 5 | 6 | 58 | 57 |
| 56 | 55 | 11 | 12 | 13 | 14 | 50 | 49 |
| 17 | 18 | 46 | 45 | 44 | 43 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 38 | 37 | 36 | 35 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 30 | 29 | 28 | 27 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 22 | 21 | 20 | 19 | 47 | 48 |
| 16 | 15 | 51 | 52 | 53 | 54 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 59 | 60 | 61 | 62 | 2 | 1 |

☒ P

《これが魔方陣をなすことの説明》

図Oでは、縦・横列とも緑のマスと黒のマスは半分ずつ存在することになります。さらに緑のマスは線対称な位置に存在するので、緑のマスと黒のマスの数の和はしいです。例えば図Oの3列目は $17+18+23+24=82=19+20+21+22$ となります。よって図Pでは列の和は

$$\begin{aligned} & (\text{黒い数の和}) + (\text{青の数の和}) \\ &= (\text{黒い数の和}) + \frac{N}{2}(N^2+1) - (\text{緑の数の和}) \\ &= \frac{N}{2}(N^2+1) = \frac{N^3+N}{2} \text{ となります。} \end{aligned}$$

また、対角線の和は等差数列の和なので

$$\{(\text{初項})+(\text{最終項})\} \times \frac{N}{2} = \frac{N^3+N}{2}$$

となります。

しかし、これは奇数の場合のようにラテン方陣の補助方陣を生成しません。

3-C. 4の倍数次のグレコラテン方陣の作り方

4の倍数は $2^m \times n$ (nは奇数)と分解できます。

第一：N=2^mのときに作成できる。

第二： p 次、 q 次るとき作成可能ならば、 $p \times q$ 次るとき作成可能。
 を示せば成り立ちます（ただし「第二」は p と q が互いに素でなくても成り立つので、本当は $N = 4, 8$ のときを証明すればいいです。）

第一の証明

まず、 xor （排他的論理和）を説明します。 A, B という数があるとき、
 $A xor B$ とは、 A と B を二進法で表して、各桁の数字が同じときにその桁を0にして、異なるときにその桁を1にした数の事です。

たとえば、 $A = 11, B = 18$ としたとき、二進法で11は1011、18は10010ですから、

| | | |
|---------|-------|-----------------|
| A | 01011 | 一桁目は0と1で異なるから1、 |
| B | 10010 | 二桁目は1と0だから1、 |
| A xor B | | 三桁目は0同士だから0、 |
| | 11001 | 四桁目は1同士で0 |

というように対応させていき、
 $A xor B = 11001(2) = 25$ と求まります。これが $(A xor B) xor C = A xor (B xor C)$ や
 $A xor A = 0$ などを成り立たせることが、各桁ごとに検証することにより容易に分かります。

次に N 個の列 $[0] \sim [N-1]$ を定義します。0以上 N 未満の P において、
 列 $[P]$ は、 $\{0 xor P, 1 xor P, \dots, (N-1) xor P\}$ となります。

分かりにくいので、

$N = 8$ の例を挙げます。

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 列[0] : {0,1,2,3,4,5,6,7} | 列[1] : {1,0,3,2,5,4,7,6} |
| 列[2] : {2,3,0,1,6,7,4,5} | 列[3] : {3,2,1,0,7,6,5,4} |
| 列[4] : {4,5,6,7,0,1,2,3} | 列[5] : {5,4,7,6,1,0,3,2} |
| 列[6] : {6,7,4,5,2,3,0,1} | 列[7] : {7,6,5,4,3,2,1,0} |

$A \neq B$ のとき、 $A xor C \neq B xor C$ が成り立つので同じ位置に同じ数字は来ません。

列ができたので、これらを上から並べてグレコ・ラテン方陣を作ります。

一つ目の Q は、 $[0][1][2][3][7][6][5][4]$ と、列を前半は番号順に、後半は逆順に並べます。

もう一つの R は、前半は $[0][2][4][6]$ と偶数の列を順に並べ、その後は、 $[5][7][1][3]$ と、奇数を2つずつまとめ、順序を逆にして並べます。これで完成です。ただし、対角線方向の和は等しくないので図 Q の0と4(一般的には $\frac{N}{2}$)を入れ替えると上手くいきます。

| | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| ☒ Q | | | | | | | |

| | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 6 | 7 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 6 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 5 | 4 | 7 | 6 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| ☒ R | | | | | | | |

《これが直交するグレコ・ラテン方陣になることの説明》

Q の列 $[a]$ と R の列 $[b]$ が同じ位置に来たとき、列 $[a]$ の数 p が列 $[b]$ の数 q に対応している(同じ位置にある)ことは、 $a xor t = p, b xor t = q$ と表せます。ただし t はその数の位置です。

すると、 $a xor a = 0$ なので、

$$\begin{aligned}
 q &= b xor t \\
 &= b xor t xor (a xor a) \\
 (\because \forall y \text{ において } y xor 0 &= y)
 \end{aligned}$$

$$= a \text{ xor } b \text{ xor } (t \text{ xor } a)$$

$$= (a \text{ xor } b) \text{ xor } p$$

となります。よって、列[a]のpは、列[b]の(a xor b) xor pと同じ位置に来ます。よってN列すべての(a xor b)が異なるとき、Qの全ての列にある任意のpはRにおいてそれぞれ違う数に対応するので、QとRが直交しているといえます。

では、N列すべてで(a xor b)は異なるでしょうか。数学的帰納法で示します。

N=4のとき、Pの列は[0][1][3][2]でQの列は[0][2][1][3]です。このとき、
 $0 \text{ xor } 0 = 0, 1 \text{ xor } 2 = 3, 3 \text{ xor } 2 = 1, 1 \text{ xor } 3 = 2$ で全て異なります。

次に、 $N = 2^k$ のとき成り立っているとして、 $N = 2^{k+1}$ のときに成り立つかどうか調べます。

$N = 2^k = n$ のとき、Pの列は $[0][1] \cdots [\frac{n}{2}-1][n-1][n-2] \cdots [\frac{n}{2}]$ とならび、

Qの列は $[0][2] \cdots [n-2][n-3][n-1][n-7][n-5] \cdots [1][3]$ と並んでいます。

$N = 2^{k+1} = 2n$ のとき、Pの列は $[0][1] \cdots [n-1][2n-1][2n-2][n]$ とならび、

Qの列は $[0][2] \cdots [2n-2][2n-3][2n-1][2n-7][2n-5] \cdots [1][3]$ と並んでいます。

(図Sを参照)これを4つの部分に分けて検証します。

① Pの列が $[0] \sim [\frac{n}{2}-1]$ のときには、Qの列は $[0][2] \cdots [n-2]$ とならび、 $N = n$ のときの前半部分と一致します。

② Pの列が $[\frac{n}{2}] \sim [n-1]$ のときには、Qは $[n][n+2] \cdots [2n-2]$ とならびます。それぞれを①の部分と2進法で比較します。Pの $[\frac{n}{2}] \sim [n-1]$ までは $[0] \sim [\frac{n}{2}-1]$ までに $\frac{n}{2}$ を足したものですから、2進法で表すと $[0] \sim [\frac{n}{2}-1]$ の上から2つ目の位が異なり、同様にQの $[n][n+2] \cdots [2n-2]$ は $[0][2] \cdots [n-2]$ の一番上の位が異なりますから、xorした結果は①の結果と上二桁が異なるものになります。

③ Pの列が $[2n-1] \sim [\frac{3n}{2}]$ のときには、Qは $[2n-3][2n-1] \cdots [\frac{3n}{2}+1][\frac{3n}{2}+3]$ とならびます。これを2進法で表すと、一番上の(つまり 2^k)の位は必ず1になるので、xorした結果は一番上の位が全て0の場合と同じです。よって $[\frac{3n}{2}-1] \sim [n]$ と $[\frac{n}{2}-3][\frac{n}{2}-1] \cdots [3][1]$ はnを引いて

$[\frac{n}{2}-3] \sim [3][1]$ と $[\frac{n}{2}-3][\frac{n}{2}-1] \cdots [3][1]$ に置き換えられ、これをxorした結果は $N = n$ のときの後半部分と等しくなります。

④ Pの列が $[\frac{3n}{2}-1] \sim [n]$ のときには、Qは $[\frac{3n}{2}-3][\frac{3n}{2}-1] \cdots [n+1][n+3]$ とならびます。これをxorした結果は②と同様に③の結果の上二桁が異なるものと等しいです。

| | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P | 000 | 001 | 010 | 011 | 111 | 110 | 101 | 100 |
| Q | 000 | 010 | 100 | 110 | 101 | 111 | 001 | 011 |
| Xor | 000 | 011 | 110 | 101 | 010 | 001 | 100 | 111 |
| (k=2) | ① | | ② | | ③ | | ④ | |
| 図S 緑と青が①と②、 ③と④の相違点です | | | | | | | | |

よって①③はそれぞれ $N = n$ のときの前・後半部分、②④はそれぞれ①③の上二桁が異なるものになるので、PとQの列をxorした結果は全て異なります。よってQとRはNが2の何乗であっても直交するグレコ・ラテン方陣となります。

第二の証明 (例は $N = 12 = 3 \times 4$ のとき)

$N = p \times q$ のとき、 p 次の直交するラテン方陣の片方を q^2 個敷きつめます (図 T)。もう片方も別の図 T' に敷きつめます。図 T の各太枠を、4 次ラテン方陣図 E の各マスに対応させます。図 T の値が x で、対応する図 E の値が y のとき、 $x + qy$ という値を図 U に記入します。

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| ☒ T | | | | | | | | | | | |

| | | | |
|-----|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |
| ☒ E | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 | 7 | 8 | 6 | 10 | 11 | 9 |
| 8 | 6 | 7 | 11 | 9 | 10 | 2 | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 8 | 6 | 10 | 11 | 9 | 1 | 2 | 0 | 4 | 5 | 3 |
| 5 | 3 | 4 | 2 | 0 | 1 | 11 | 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 9 | 10 | 11 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 | 10 | 11 | 9 | 7 | 8 | 6 |
| 11 | 9 | 10 | 8 | 6 | 7 | 5 | 3 | 4 | 2 | 0 | 1 |
| 9 | 10 | 11 | 6 | 7 | 8 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 10 | 11 | 9 | 7 | 8 | 6 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| ☒ U | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| ☒ T' | | | | | | | | | | | |

| | | | |
|------|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 0 |
| ☒ F' | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 9 | 11 | 1 | 0 | 2 | 4 | 3 | 5 | 7 | 6 | 8 |
| 11 | 10 | 9 | 2 | 1 | 0 | 5 | 4 | 3 | 8 | 7 | 6 |
| 9 | 11 | 10 | 0 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 6 | 8 | 7 |
| 1 | 0 | 2 | 10 | 9 | 11 | 7 | 6 | 8 | 4 | 3 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 0 | 2 | 1 | 9 | 11 | 10 | 6 | 8 | 7 | 3 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 8 | 4 | 3 | 5 | 1 | 0 | 2 | 10 | 9 | 11 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 11 | 10 | 9 |
| 6 | 8 | 7 | 3 | 5 | 4 | 0 | 2 | 1 | 9 | 11 | 10 |
| 4 | 3 | 5 | 7 | 6 | 8 | 10 | 9 | 11 | 1 | 0 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 8 | 7 | 6 | 11 | 10 | 9 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 5 | 4 | 6 | 8 | 7 | 9 | 11 | 10 | 0 | 2 | 1 |
| ☒ U' | | | | | | | | | | | |

例えば右上端のマスの場合は、図 T の右上端が 1 で、右上の太枠の値が図 E では 3 になっているので、 $x + qy = 1 + 3 \times 4 = 10$ が図 U に書き込まれています。同様に図 U' にも図 T' と図 F' に従って数を書き入れます。

すると、図 U と図 U' は直交します。というのも、任意の (α, β) ($0 \leq \alpha, \beta \leq N$) において、 $\alpha = x_1 + qy_1, \beta = x_2 + qy_2$ とすれば、図 E と F' の重ねあわせにおいて (y_1, y_2) なる組み合わせを持つ太枠 (E と F' が直交するので必ず存在します) の中で、図 T と U の重ね合せ中の (x_1, x_2) なる組み合わせを持つマス (同様にこれも存在します) のみがこの条件を満たすことが分かります。これが全ての (α, β) に成り立

つので、自然と U と U' が直交していることが分かります。

4. $4k+2$ 次の魔方陣

ここまででは、 $N = 4k+2$ (k は整数) で表されるとき魔法陣が作れません。またこのときの N 次のラテン方陣は、 $N = 2, 6$ のとき作ることができません。

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|---|
| E | D | C | B | A | j |
| F | 11 | 18 | 23 | 22 | f |
| G | 24 | 21 | 12 | 17 | g |
| H | 14 | 15 | 26 | 19 | h |
| I | 25 | 20 | 13 | 16 | i |
| J | d | c | b | a | E |
| ⊗ V | | | | | |

| | | | |
|-----|----|----|----|
| 1 | 8 | 13 | 12 |
| 14 | 11 | 2 | 7 |
| 4 | 5 | 16 | 9 |
| 15 | 10 | 3 | 6 |
| ⊗ C | | | |

| | | | | | |
|------|----|----|----|----|----|
| 5 | 28 | 36 | 35 | 3 | 4 |
| 31 | 11 | 18 | 23 | 22 | 6 |
| 7 | 24 | 21 | 12 | 17 | 30 |
| 8 | 14 | 15 | 26 | 19 | 29 |
| 27 | 25 | 20 | 13 | 16 | 10 |
| 33 | 9 | 1 | 2 | 34 | 32 |
| ⊗ V' | | | | | |

そこで、2次低い魔法陣を取り囲むように数を書き入れ魔方陣を作ります。図は $N = 6$ の場合で説明しています。

図 V は 4 方陣 (図 C) の各数に 10 を足して、中央に入れた様子です。よって各列の和は 74 となっています。A~I、a~I には 1~10 および 27~36 までが入ります。また 6 方陣の定和は 111 なので、 $A+a=B+b=C+c=\dots=J+j=37$ になります。

さらに「上下左右の端の列の和が 111 となる」という条件さえ満たせば図 V は魔方陣になることが分かります。

j, A, B, C, D, E の 6 数において、

この 6 数の内丁度 3 つ (例えば j と A と E) が 10 以下であるとします。すると向かい合う数の和が 37 になるので、 b と c と d は全て 10 以下です。

$$j + A + B + C + D + E = 111$$

$$\Leftrightarrow j + A + (37 - b) + (37 - c) + (37 - d) + E = 111$$

$$\Leftrightarrow 111 + (j + A + E) - (b + c + d) = 111$$

$$\Leftrightarrow j + A + E = b + c + d$$

これにより「上下左右の端の列の和が 111 となる」ということと「向かい合う列の 10 以下の 3 数の和は等しい」ということは同値です。

これをもとに図 V に数字を埋めると図 V' の魔法陣ができます。向かい合う数の和は 37 になり、上下列の 10 以下の数の和は $3+4+5=12=9+1+2$ 、左右列の 10 以下の数の和は $5+7+8=20=4+6+10$ でそれぞれ等しくなっています。

これを N で一般化すると、

- ・ 向かい合う数の和が $N^2 + 1$ である

- ・ 向かい合う列の $2N - 2$ 以下の数 ($\frac{N}{2}$ 個) の和は等しい

を満たすように配置すれば魔法陣が作れます。ここで関孝和の方法を紹介します。

- ① 1 を下端左から 3 番目に、2 をその右に書きます。
- ② 以後 2 つずつ上列・下列交互に書きます。
- ③ 右上に $N - 2$ が書かれるので、左上に $N - 1$ を書きます。
- ④ 右端の上から 2 番目に N を書きます。
- ⑤ $N - 1$ の 2 つ下に $N + 1$ を書きます。
- ⑥ 以後二つずつ左列・右列交互に書きます。
- ⑦ 左端の下から三番目に $2N - 4$ が来ます。
- ⑧ 1 の左に $2N - 3$ 、右端の下から 2 番目に $2N - 2$ を書きます。
- ⑨ 各数の向かい側に足して $N^2 + 1$ になる数を書きます。

図 W に⑨の操作をして、内側の太枠に 8 方陣のを入れれば 10 方陣になります。
 この関孝和の方法で魔法陣が作れるのを説明するのは簡単です。上下列においては、
 $1+2+3, (N+1)+(N-2)=2N-3$ が成り立ち、2 つずつ交互に配置することによって、 $4+7=5+6$ が (N が大きい場合は $8+11=9+10$ 以降も) 成り立ちます。よって上下の和は等しいです。左右の和は、最後の $2N-2$ を $2N-3$ と 1 に分けると、
 $N+(N+3)=(N+1)+(N+2), \dots, (2N-6)+(2N-3)=(2N-4)+(2N-5)$ 及び $(N-2)+1=N-1$ が成り立つので、これもまた等しいです。よって魔方陣の成立条件を満たすことになります。

| | | | | | | | | | |
|------------|----|-------------|---|---|---|---|---|---|----|
| 9 | | | | 3 | 4 | | | 7 | 8 |
| | | | | | | | | | 10 |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| | | 8 方陣 | | | | | | | 13 |
| | | | | | | | | | 14 |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 18 |
| | 17 | 1 | 2 | | | 5 | 6 | | |
| 図 W (N=10) | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|-------------|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|
| 9 | 84 | 100 | 99 | 3 | 4 | 96 | 95 | 7 | 8 |
| 91 | 22 | 78 | 77 | 25 | 75 | 27 | 28 | 72 | 10 |
| 11 | 21 | 37 | 60 | 68 | 67 | 35 | 36 | 80 | 90 |
| 12 | 81 | 63 | 43 | 57 | 56 | 46 | 38 | 20 | 89 |
| 88 | 82 | 39 | 54 | 48 | 49 | 51 | 62 | 19 | 13 |
| 87 | 69 | 40 | 50 | 52 | 53 | 47 | 61 | 32 | 14 |
| 15 | 70 | 59 | 55 | 45 | 44 | 58 | 42 | 31 | 86 |
| 16 | 30 | 65 | 41 | 33 | 34 | 66 | 64 | 71 | 85 |
| 83 | 29 | 23 | 24 | 76 | 26 | 74 | 73 | 79 | 18 |
| 93 | 17 | 1 | 2 | 98 | 97 | 5 | 6 | 94 | 92 |
| 図 W' (N=10) | | | | | | | | | |

5-A. 入れ子の方陣 (偶数次)

4 のやり方を応用して、4 の倍数次の魔方陣に対しても同じことができましょうか。 $(4k-2)$ 方陣を取り囲むようにして $4k$ 方陣を作ります。図 X のように、

- ① 右端の中央上に 1 を入れます。
- ② k までの数を上に入れていきます。
- ③ $k+1$ から $2k$ までは左列に同様に書いていきます。
- ④ $2k+1$ から 2 つずつ交互に上下列に書いていきます。

このとき 8~11 は灰色の位置にあります。

⑤ 右上の $6k-1$ まで書き終わったら最後の 4 つ (8~11) を向かいに移します (これで 8~11 は黒い数字のほうへ移ります。)

- ⑥ 左下に移った $6k-1$ の上に $7k-2$ までの数を入れていきます。
- ⑦ $7k-1$ から $8k-2$ までを右列に書きます。
- ⑧ 各数の向かい側に足して N^2+1 になる数を書きます。

こうすれば、上下列においては $4+7=5+6, 8+11=9+10$ (k が大きければ同様にそれ以降の等式を置く) が成り立つので和は等しく、左右列においても

$$(1+\dots+k)+\{(7k-1)+\dots+(8k-2)\}=k(8k-1)$$

$$\{(k+1)+\dots+(2k)\}+\{(6k-1)+\dots+(7k-2)\}=k(8k-1)$$

で和が等しくなっています。

4 方陣の周りに数を置いて 6 方陣にし、それを使って 8 方陣をつくり、それを使って 10 方陣を作ったのが図 W' です。

図 W' は 10 方陣ですが、太枠部分は全て魔方陣になっています。もちろんさらに大きい「入れ子」も作れます。

| | | | | | | | |
|------------------|---|-------------|---|---|---|----|----|
| 4 | | | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | | | | | | | |
| | | | | | | | 2 |
| | | 6 方陣 | | | | | 1 |
| | | | | | | | 14 |
| | | | | | | | 13 |
| 12 | | | | | | | |
| 11 | 5 | 6 | | 8 | 9 | 10 | |
| 図 X (k=2 の 8 方陣) | | | | | | | |

5-B. 入れ子の方陣 (奇数次)

奇数の場合は、3 方陣を応用します。 $2k+1$ 方陣において、中央の数を $M=2k^2+2k+1$ にします。そして、 $M-4k, M-3k, \dots, M+4k$ で中央の 9 マスを 3 方陣の要領で埋めます。図 Y においては中央 9 マスで

13→16→19→22…と3方陣と同じ順番で書いています。次に図の太字のように放射状に数字を書き込みます。中央の数 M の周りの数 R において、

- ・ $M < R$ ならば R の方向に1ずつ減らして書く
- ・ $M > R$ ならば R の方向に1ずつ増やして書く

この法則に従うと、 $R = 31$ (25 の下の 31) のときには、 $31 > 25$ なので、31 の下には 30、29 が続き、 $R = (25$ の右下の) 16 の場合は、 $16 < 25$ より、16 の右下には 17、18 が続いています。これで太字は埋まりました。

次に、右上に空いている $k(k-1)$ 個のマスに、自由に $2k(k-1)$ 以下の奇数を入れます。 a が埋まったマスと (中心において) 点対称な位置に $a+1$ を埋めます。そこから、やはり向かい側に足して $(2k+1)^2 + 1$ になる数を入れます。図 Y でいうと、7 の点対称な位置には 8 が、 $7 \cdot 8$ の向かい側にはそれぞれ 43、42 が埋められています。

《これが入れ子になることの証明》

太字のマスだけを見ると、中央の 3×3 の部分は 3 方陣のように書いたので当然魔方陣になります。次にその上側の

$\{36, 14, 27\}$, $\{35, 15, 26\}$ という列は $\{37, 13, 28\}$ という列に比べてその和は1ずつ小さくなっています。右列においても同様です。左列・下列においては外側に行くにつれて1ずつ大きくなっています。ということは、 t を自然数として、 $(2t+1)$ 方陣の部分は、上列・右列よりも左列・下列のほうがその和は $2(t-1)$ だけ大きくなっています(※)。余ったマスは、 $(2t+1)$ 方陣の外側の各列に $2(t-1)$ マス存在します。そこで、そのうちの $t-1$ マスを奇数で埋め [例えば 9, 11]、その点対称の $t-1$ マスをそれより 1 大きい偶数で埋めると [10, 12]、 $t-1$ だけ向かいの列の和にズレがおきます。さらにその向かい側に数を埋めると [38, 40 と 41, 39]、再び $t-1$ ズレます。この合計 $2(t-1)$ のズレ

を、(※) のズレと相殺させると、各方陣の外側の列の和が等しくなり、向かい側の数の和が常に $(2k+1)^2 + 1$ なので、その他の列の和も等しくなります。

| | | | | | | |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 35 | 38 | 40 | 15 | 9 | 11 | 26 |
| 45 | 36 | 42 | 14 | 7 | 27 | 5 |
| 47 | 49 | 37 | 13 | 28 | 1 | 3 |
| 21 | 20 | 19 | 25 | 34 | 33 | 32 |
| 4 | 2 | 22 | 31 | 16 | 48 | 46 |
| 6 | 23 | 8 | 30 | 43 | 17 | 44 |
| 24 | 12 | 10 | 29 | 41 | 39 | 18 |
| 図 Y (k=3 の 7 方陣) | | | | | | |

[Fin]

参考文献：内田伏一『魔方陣に見る数の仕組み 汎魔方陣への誘い』日本評論社

Coffee Break

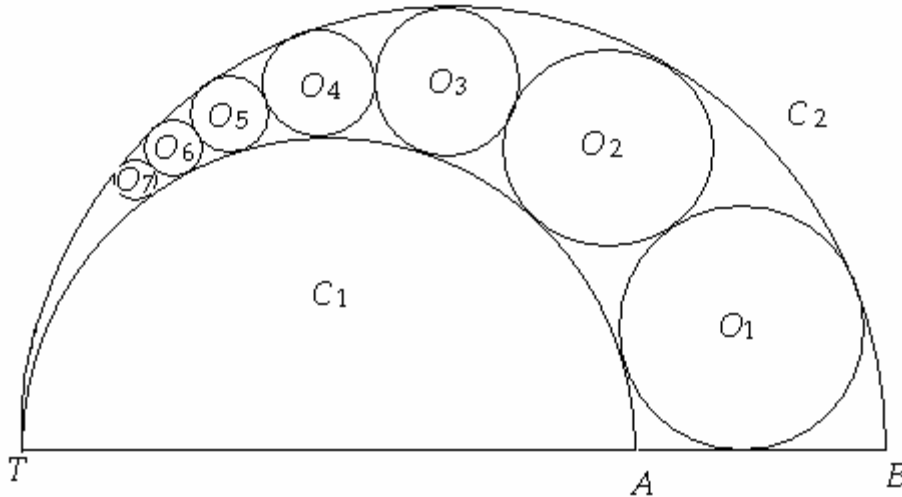
高2 四方 紘太郎

コーヒーは飲まなくてもいいですがひと休みのページです。関孝和は江戸時代の和算家でした。ということで、ここでは江戸時代に発表された和算の問題の中の幾何の問題をここで出したいと思います。特に円や楕円を利用した幾何の問題は解くのが難しく、世界でも最先端を行っていました。というより、世界でこのような下の図に見るような図形の研究は日本独特と言ってもいいぐらいです。ここでは森北出版の「日本の幾何」から引用した問題をまずは1問出してみようと思います。

問題

同一直線上に3点 T, A, B があり、 $TA = 2r, TB = 2s$ として、これらを直径とする半円 C_1 (半径 r) と C_2 (半径 s) を描く。ただし、 $r < s$ とする。半円 C_1 (半径 r) に外接し、半円 C_2 (半径 s) に内接し、さらに AB にも接する円 O_1 (半径 r_1) を描く。この O_1 (半径 r_1) から始めて半円 C_1 (半径 r) に外接し、半円 C_2 (半径 s) に内接する連結した円の鎖 O_i (半径 r_i) ($r = 1, 2, 3, \dots$) を作る。このとき、次の関係を示せ。

$$\frac{7}{r_4} = \frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1}$$



普通このような問題は**反転**を使って解くのですが江戸時代の日本の数学者はこのような問題全てをピタゴラスの定理や相似、比例関係ぐらいしか使わず、とても初等的に解いていたといひます。こういうやりかたで解くには相当の計算力が必要なのですが、江戸時代の日本人はこれを凄まじい計算力と因数分解などの数式に関するテクニックで解いていました。ここでは現代的に反転を使ってとくことにしましょう。

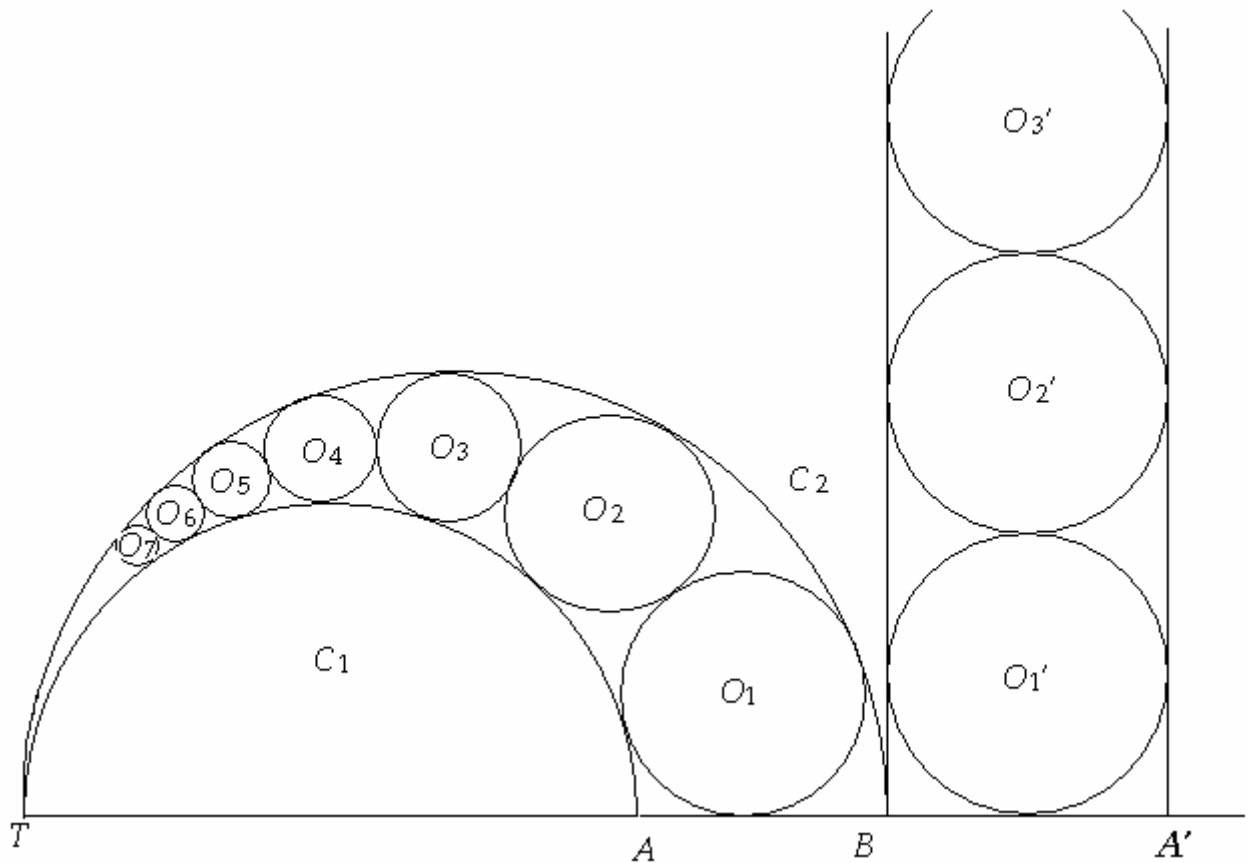
解説

図において、点 T を中心に半径 TB の円を反転円として反転します。反転した図は次のページのようになっています。そこで、次の事実を使います。この事実の証明は容易にできるので省略させていただきます。

$$\left(\frac{\text{反転の中心から円 } O_i' \text{ に引いた接線の長さ}}{\text{反転円の半径}} \right)^2 = \frac{\text{円 } O_i' \text{ の半径}}{\text{円 } O_i \text{ の半径}}$$

すると、

$$\frac{7}{r_4} - \frac{2}{r_7} - \frac{5}{r_1} = \frac{7(4s^2 + 4sr' + 49r^2)}{r' \cdot 4s^2} - \frac{2(4s^2 + 4sr' + 169r^2)}{r' \cdot 4s^2} - \frac{5(4s^2 + 4sr' + r'^2)}{r' \cdot 4s^2} = 0$$

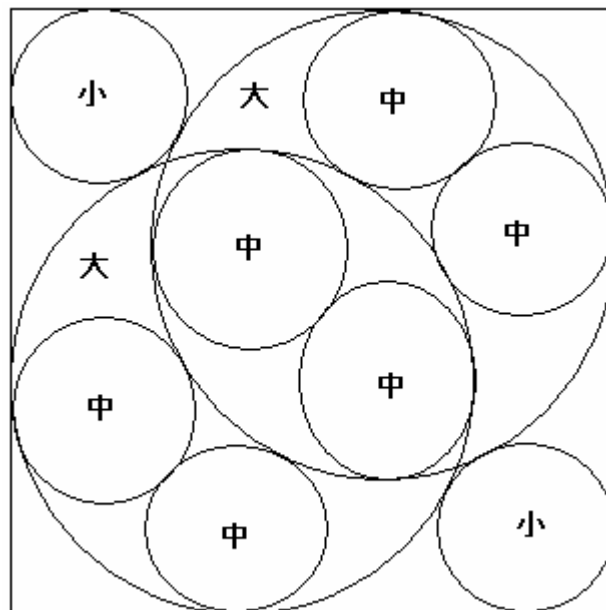


となり、等式は正しい事が証明できます。
 式一本です。きわめてエレガントに解けます。昔の人は大変な計算をしていましたが、このような複雑に円が絡み合った問題の中に美しい関係を見出す事に魅力を感じたのでしょう。

この算額は 1814(文化 11)年に現在の群馬県太田市細谷冠稲荷神社に奉納されたもので、今も現存します。
 『関孝和』にも書いてあるように算額は全国にまだ 1000 個ほど現存しています。関東地方は特に算額が多いのでもしかしたらあなたの身の回りの神社にも算額が奉納されている所があるかもしれません。

さて、次の問題も実際にある算額の問題です。今度は問題文は漢文です。算額というものは通常漢文でかかれて奉納します。ですから復元するときも現代語訳するのではなく原文に忠実に漢文で再奉納します。現在は算額の奉納は、何か数学関係のイベントなどが無いかぎり行われていません。遺題継承という習慣も日本の数学が西洋化するにつれてなくなって行きました。それでも明治時代では行われていたそうです。答えも書きますが、答えも漢文です。図も参照してください。

問題



今有如周方内容大圓二箇中圓六箇小
圓二箇尺云小圓徑一寸問中圓徑如何

解答

答曰中徑一寸零三釐二毫二死絲八八
九六有奇
術曰置四分開平方加二箇各天四之開平
方以減天及一箇除以除小徑乘四分得中
徑合間

最後にこの算額の出展を記しておきます。この算額は1823(文政6)年に現在の山形県東田川郡羽黒町羽黒山神社に奉納された大判(450cm×150cm)の算額で、これはそこに掲載されていた11問のうちの1問です。今も現存します。

完全性定理

高1 梅島圭立

I (簡潔に) 数理論理学とは

別名・記号論理学とも呼ばれ、論理学を記号を用いてものを表現し数学によって研究する学問である。ここでは述語論理から出発して完全性定理の証明を目指す。

II 述語論理-定義

述語論理とは命題を変数や関数として表現し、その論理的な内部構造に立ち入って考察する論理である。「数」と言っているが厳密に定義できるものなら何でも良い。

いみわかんねえよって思ったと思いますが、じきにわかるので読み進んでください。

次の7つの記号を定義する。

- (i) 対象記号 C_1, C_2, \dots
- (ii) 関数記号 F_1, F_2, \dots
- (iii) 述語記号 P_1, P_2, \dots
- (iv) 自由変数 A_1, A_2, \dots
- (v) 束縛変数 X_1, X_2, \dots
- (vi) 論理記号 $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vdash, \forall, \exists$
- (vii) 補助記号 $()$ など

ここでいう記号は皆形式的なものである。(vi)の記号は通常「且つ」「又は」「でない」「ならば」「同値」「すべての」「存在する」などと読むが、ここでは先に「(i)~(vii)の定義に基づく一般的な論理」を扱うためとありあえず記号に意味はないものとする。(i)は「 A は B を持つ」と言った時の B のことで、定数のようなものと考えれば良い。(ii)は「+」「 \cdot 」「 Δ 」などである。(iii)は「=」「>」「 \equiv 」などである。(iv)は変「数」と書いてあるが別に数である必要は無く「平面上の点 A 」などでもよい。(v)は \forall, \exists がついた変数で、 \forall と \exists は束縛記号或いは量(子)記号という。(vi)はこれで論理の関係を表す。(vii)は無くても構わないが、 $()$ を使わない記法はわかりにくい筈だ。

(ii)は述語論理を扱う事に関しては必要ないが、一般の数学的或いはそのような性質を持つ体系を扱う際に便利なのでいれておいた…とはいえ完全性定理を示すまでには残念ながら登場しない。具体的には「任意の X, Y について $X+Y=Y+X$ 」を $\forall X \forall Y (P=(F+(X, Y), F+(Y, X)))$ 、「任意の点 X, Y について $XY=YX$ 」を $\forall X \forall Y (P=(D(X, Y), D(Y, X)))$ (D は距離)と表す。

又、 \forall, \exists は変数の変域が無限集合の場合(自然数、平面上の点など)を扱うために用いる。有限集合のみを扱う論理を命題論理(\forall, \exists が登場せず命題記号と論理記号と命題論理式のみを使う)と言い、いけば述語論理より簡単である。

◎項の定義

- (i) 対象記号と自由変数は項である。
- (ii) T_1, T_2, \dots, T_N が項で F が関数記号ならば $F(T_1, T_2, \dots, T_N)$ も項である。
- (iii) (i)(ii)からできたもののみが項である。

断っておくと、 $F(T_1, T_2, \dots, T_N)$ は式に T_1, T_2, \dots, T_N の N 個の項を含む関数である。

◎論理式の定義

- (i) T_1, T_2, \dots, T_N が項で P が述語記号なら $P(T_1, T_2, \dots, T_N)$ は論理式である。
- (ii) A, B が論理式ならば $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B$ も論理式である。
- (iii) 自由変数 A を持つ論理式 $A(A)$ が束縛変数 X を持たないとき、 $A(A)$ の A を全て X で置き換えたものを $A(X)$ で表すと $\forall X A(X), \exists X A(X)$ も論理式である。
- (iv) (i)(ii)(iii)からできたもののみが論理式である。

項と同様に、 $P(T_1, T_2, \dots, T_N)$ は式に T_1, T_2, \dots, T_N の N 個の項を含む論理式である。今後の議論においてはほとんど論理式しか登場しない。つまりほとんどが述語記号を含むということであり、これが述語論理と呼ばれる所以である(少し違うけど気にしないで)。

◎形式的体系

特にそれぞれの記号の意味を定めず、その論理的な思考過程のみを記述するために考えられたのが形式的体系である。形式的である方が計算もし易い。ここでは有名で比較的扱い易い「ヒルベルト&アッケルマン『数理論理学の基礎』での公理系」(HA)を用いる。これは公理系として充分であるが、これが完全性であり後で証明する。

公理

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$
4. $A \wedge B \rightarrow A$
5. $A \rightarrow A \vee B$
6. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
8. $\neg\neg A \rightarrow A$
9. $A(T) \rightarrow \exists X A(X)$ (Tは任意の項)
10. $\forall X A(X) \rightarrow A(T)$ (Tは任意の項)

推論規則

- 1 論理式 A , $A \rightarrow B$ から B が推論できる。
- 2 $A(A) \rightarrow C$ から $\exists X A(X) \rightarrow C$ が推論できる。(Aは自由変数)
- 3 $C \rightarrow A(A)$ から $C \rightarrow \forall X A(X)$ が推論できる。(Aは自由変数)

これらの記号には、後で解説する制限のあるものを除いてどんな論理式を代入しても良い(但し有限列)のだが、これは真偽関数の所で示す。このことからこの体系は無数の公理から成っていると見える。公理 9, 10 の T の中の変数は A の中で束縛されず、推論規則 2, 3 の C は A を含まないとする。前者について、論理式の定義からすれば当然なのだが、例えば 9 で $A(T)$ が $\forall X X$ のとき、或いは 10 で $\forall X A(X)$ が $\forall X X$, $A(T)$ が $\exists X X$ のとき

$$\forall X X \rightarrow \exists X X$$

となり明らかに矛盾。後者について、例えば $A = 0$ は任意の A に対しては成り立たないように全ての述語記号が入った論理式を自由変数が任意の値を取って常に満たすことはできない。

Ⅲ 論理式の計算

ある論理式が公理と推論規則から推論されるとき、その論理式は**証明可能**であるという。証明可能な論理式を**定理**ともいう。そして論理式 A が公理のみから証明できるとき「 $\vdash A$ 」、 B_1, B_2, \dots, B_N を仮定して証明できるとき「 $B_1, B_2, \dots, B_N \vdash A$ 」と書く。

実際に証明してみよう。

$A \rightarrow A$

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (公理 1, A に A 代入) $\dots P$

$\neg A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ (公理 2, B に $(A \rightarrow A)$, C に A 代入) $\dots Q$

$P, Q \vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \dots R$

$\neg A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (公理 1 B に $A \rightarrow A$ を代入) $\dots S$

$R, S \vdash A \rightarrow A$

$A \rightarrow A$ は公理ではないので当たり前にも証明が必要。又、公理には論理式ならば何を入れても良いので証明されていない $(A \rightarrow A)$ も代入してよい。

◎演繹定理

演繹定理とは「 $T, A \vdash B$ ならば $T \vdash A \rightarrow B$ (Tは任意の論理式)」という内容の定理である。この定理は論理式の推論に関するもので、さっき定義した「公理から導かれる定理」とは性質が違う。ここで初めて「定理の定理」が出てくるのであり、これを超(メタ)論理的定理という。

$A \rightarrow A$ の証明は次のように表すことができる。

$$\frac{\frac{A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))}{A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)}{(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)}{A \rightarrow A}$$

こう書くとどうい過程で証明されたかがわかり易い(但しこのように全ての式を一カ所を書くにごちゃっとして見えるためさっきのように式を並べることが多い). このような図の上から K 番目の段を K 階と呼ぶとする.

今後突然証明の式が登場するが, 一の左側の各式が公理でなくても証明の式自体が正しければよい.

(証明) 数学的帰納法を用いる. (i) $K=1$ のとき B は公理か A そのものでなければならない. これは

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow A)}{B \quad B \rightarrow (A \rightarrow B)}$$

$A \rightarrow B$ 及びさっきの $A \rightarrow A$ から証明可能.

(ii) $K \geq 1$ なる K までの階で演繹定理が成り立つとすると, K 階と $K+1$ 階の推論が

$$\begin{array}{l} (K \text{ 階}) \quad \textcircled{1} \quad \frac{P \quad P \rightarrow B}{B} \quad \textcircled{2} \quad \frac{P(A) \rightarrow B}{\exists X P(X) \rightarrow B} \quad \textcircled{3} \quad \frac{B \rightarrow P(A)}{B \rightarrow \forall X P(X)} \\ (K+1 \text{ 階}) \end{array}$$

のときを考えれば良い (それ以外は B が公理か A のときのみ).

$\textcircled{1}$ $k \geq 1$ なる k までの階で演繹定理が成り立つので $A \rightarrow P, A \rightarrow (P \rightarrow B)$

$$\frac{\frac{A \rightarrow B \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))}{(A \rightarrow P) \rightarrow ((A \rightarrow (P \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))} \quad A \rightarrow P}{(A \rightarrow (P \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (P \rightarrow B)))}$$

$A \rightarrow B$ (証明終)

$\textcircled{2}$ $k \geq 1$ なる k までの階で演繹定理が成り立つので $A \rightarrow (P(A) \rightarrow B)$

ここで $A \rightarrow (B \rightarrow C), A, B - A \rightarrow (B \rightarrow C) / A \rightarrow (B \rightarrow C), A, B - A / A \rightarrow (B \rightarrow C), A, B - B \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C), A, B - C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C), B - A \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C) - B \rightarrow (A \rightarrow C)$

なので

$$\frac{\frac{A \rightarrow (P(A) \rightarrow B)}{P(A) \rightarrow (A \rightarrow B)}}{\exists X P(X) \rightarrow (A \rightarrow B)} \quad (\text{推論規則 2})$$

$$A \rightarrow (\exists X P(X) \rightarrow B) \quad (\text{証明終})$$

$\textcircled{3}$ $K \geq 1$ なる K までの階で演繹定理が成り立つので $A \rightarrow (B \rightarrow P(A))$

ここで $-A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow A, B - A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) - B \rightarrow (A \wedge B) - A \wedge B$
 $-A \wedge B \rightarrow A \Rightarrow A \wedge B - A$

なので

| | |
|--|--|
| $\begin{array}{l} \text{I} \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B - A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B - A \\ \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B - B \\ \quad A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B - C \\ \quad A \rightarrow (B \rightarrow C) - (A \wedge B) \rightarrow C \end{array}$ | $\begin{array}{l} \text{II} \quad (A \wedge B) \rightarrow C, A, B - A \wedge B \\ \quad (A \wedge B) \rightarrow C, A, B - (A \wedge B) \rightarrow C \\ \quad (A \wedge B) \rightarrow C, A, B - C \\ \quad (A \wedge B) \rightarrow C, A - B \rightarrow C \\ \quad (A \wedge B) \rightarrow C - A \rightarrow (B \rightarrow C) \end{array}$ |
|--|--|

よって

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow P(a))}{A \wedge B \rightarrow P(a)}$$

$$(A \wedge B) \rightarrow \forall x P(x) \quad (\text{推論規則 3})$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow \forall x P(x)) \quad (\text{証明終})$$

(i) (ii) より演繹定理が示された. $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ で A も B も A を含まないことに注意.

IV 完全性定理

ようやく本題に入るのだが、1つ考えておくべきことがある。一般の形式的体系を扱うのに今ある記号だけで十分なのだろうか。述語論理は我々が普段使っている論理をモチーフにしているためこうなったためと言える。では述語論理でなかったらどうなのかということについて、はっきりしたことはわからなかった（すみません）。機会があったら研究してみたい（きいてねえよ）。

述語論理の性質として興味があるのは**無矛盾性**、**完全性**、**決定可能性**があるかどうかである。形式的体系の性質を知るには意味の無い記号の列にある性質を与え、それがどのように引継がれるかを見なければならない。それぞれについて説明しよう。

| $\forall X A(X)$ | $\exists X A(X)$ | $A(A)$ | B | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \rightarrow B$ |
|------------------|------------------|--------|-----|----------|------------|--------------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 0 | 1 | | 1 | 0 | 1 |
| | | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |

◎ 無矛盾性

公理系から A も $\neg A$ も証明できるとき、この公理系は**矛盾**しているという。無矛盾な公理系とは A と $\neg A$ の両方が証明できる A が存在しないもののことをいう。

述語論理の無矛盾性を示すために**真偽関数**を用いる。まず、全ての論理式が $\{0,1\}$ のいずれかの値を左表のように取るとする。このとき、全ての公理は1の値を持つ。推論規則1について $A, A \rightarrow B$ がともに1のとき B は1にならざるを得ない。規則2について、 $A(A) \rightarrow C$ が1を取るなら $\exists X A(X) \rightarrow C$ も1を、規則3について $C \rightarrow A(A)$ が1を取るなら $C \rightarrow \forall X A(X)$ も1を取る。よってこの体系から0の値を持つ式は生まれない。ところが $\neg A$ は A が1のとき0を取るので A と $\neg A$ が同時に示されることはなく、この体系は無矛盾である。

ここでいう $\{0,1\}$ はあくまで性質であって真偽は問うてない。真偽関数と呼ぶのは伝統である。

◎ 決定可能性

任意の論理式に対し公理系から証明可能かどうかを決定できるときこの公理系は**決定可能**であるという。チャーチが一般には決定不可能であることを示した。その証明にはゲーデルの不完全性定理が使われているが、ここではこれ以上深入りはしない。

◎ 完全性

無矛盾性の所では「真」「偽」と言う考え方はしないといったが、完全性を扱う時にはそれぞれの記号に通常の**解釈**を与えたときその**閉論理式**が必ず（成り立つかどうかという）真か偽を取ることにする（項が無限個あっては真偽が決まらない）。 A が任意の変域の任意の値で真であるとき A は**恒真**、ある変域のある値で真の時 A は**充足可能**、任意の変域の任意の値で偽のとき A は**恒偽**であるという。「論理式 A が恒真であるならばそれは証明可能」が成り立つとき、その公理系は**完全**であるという。（補足すると、例えば $A > 3$ は $4 > A > 1$ の変域で $4 > A > 3$ の値のとき真なので充足可能である）

又、述語論理の形式的体系の全ての閉論理式の真偽が原理的に決まり、その公理・推論規則によって証明される全ての論理式が真となる解釈があるとき、その解釈を**モデル**という。完全性定理とは「述語論理の完全性」と「無矛盾な体系のモデルの存在」をいったものである。

以下の手順で証明する。3. はヘンキンの方法でありゲーデルの方法とは違う。

1. 『 A はモデル M で恒真 $\Rightarrow \neg A$ はモデル M で充足可能でない』を示す
(以下「モデル M で」は略)
2. 『 A は証明可能でない $\Rightarrow \{\neg A\}$ は無矛盾』を示す
3. 『 $\{\neg A\}$ は無矛盾 $\Rightarrow \neg A$ は充足可能 (モデルの存在定理)』を示す
4. 2. と 3. をあわせて対偶をとる
『 $\neg A$ は充足可能でない $\Rightarrow A$ は証明可能』
5. 1. と 4. をあわせて終了
『 A は恒真 $\Rightarrow A$ は証明可能』

(証明)

1. $\neg A$ が充足可能であるとするモデル M で A も $\neg A$ も真であるときができ矛盾。
2. 『 $T - A$ でない \Rightarrow 論理式の集合 $\{T, \neg A\}$ は無矛盾』と同値。
 $\{T, \neg A\}$ が矛盾したとすると $T, \neg A - \neg A$ と $T, \neg A - A$ から $T - \neg \neg A - A$ となり (背理法) 仮定に反する。

3. これが証明の中核となる.

①述語論理の公理系に論理式の集合 T を付け加えたものが無矛盾であるとする. 公理中に現れる自由変数全てに \forall をつけ (\quad) , T に現れる自由変数と述語記号を代入できないように全て定数と考える. この公理系を T' とすると, T' は無矛盾である. もし矛盾したとするとその証明が存在し (どの A , $\neg A$ の組も同時に証明できないとすると矛盾にならない), もととなる集合の矛盾が証明できるがこれは仮定に反する. よって T' は無矛盾.

② T' にある $\exists X A(X)$ の形のもの (全て定数であることに注意) を $\exists X_1 A_1(X_1), \exists X_2 A_2(X_2), \dots, \exists X_I A_I(X_I) \rightarrow A_I(C_I) \dots$ と並べ, T' に含まれない対象記号 $\{C_1, C_2, \dots\}$ を用いた $\exists X_1 A_1(X_1) \rightarrow A_1(C_1), \exists X_2 A_2(X_2) \rightarrow A_2(C_2) \dots$ を公理として T' に追加しこれを T'' とすると T'' は無矛盾である. もし矛盾したとすると矛盾する最初の $\exists X_N A_N(X_N) \rightarrow A_N(C_N)$ がある. すると $\neg(\exists X_N A_N(X_N) \rightarrow A_N(C_N)) \Leftrightarrow \exists X_N A_N(X_N) \wedge \neg A_N(C_N)$ (ド・モルガンの定理, 他/証略) が $I=1, 2, \dots, N-1$ までの公理で証明できる (ため).

③ T'' を持つ体系での自由変数を含まない論理式を B_0, B_1, \dots とする. $\{T'', B_0\}, \{T'', \neg B_0\}$ の無矛盾である方を T_1 とする. 以下同様に T_2, T_3, \dots を定めこれらを全て含むものを T_* とする. このとき, T_* は無矛盾である. もし矛盾したとすると矛盾する最初の T_I があり, T_I は $B_I - 1$ か $\neg B_I - 1$ のいずれかを含むことで矛盾するがこれは無矛盾な方をとると言う仮定に反する (これこそ当たり前のことだが論理的に証明すると長くなる).

④ T_* は全ての証明可能な論理式を公理として取り込んだ公理系である. これはこれ以上付け加えると矛盾するので**極大無矛盾系**と呼ばれる. 以下の性質を持つ. (以下の \Leftrightarrow は論理記号ではない)

- (1) $T_* - A \Leftrightarrow A \in T_*$
- (2) 任意の閉論理式 A について $A \in T_*$ 又は $\neg A \in T_*$
- (3) $T_* - \exists X A(X) \Leftrightarrow T_*$ のあるの項 T について $A(T) \in T_*$
- (4) $T_* - \forall X A(X) \Leftrightarrow T_*$ の任意の項 T について $A(T) \in T_*$

ここで T_* の自由変数を含まない項の集合を D とし, $T_1, T_2, \dots, T_N \in D$ に対し

$T_* - P(T_1, T_2, \dots, T_N) \Leftrightarrow P(T_1, T_2, \dots, T_N)$ は真

$T_* - P(T_1, T_2, \dots, T_N) \Leftrightarrow P(T_1, T_2, \dots, T_N)$ は偽

と言う解釈を与える. するともとの公理系, T は T_* に含まれるのでそれはこのモデルで充足可能, 従って T が無矛盾ならばその体系はモデルを持つ. この場合 T は $\neg A$ である.

4. 2. 3. から明らか.

5. 証明終了

V 非数学的解釈

さっきの証明で 1. の対象記号と 2. の $\{C_I\}$ の 2 つを別の自然数に対応させると, 4. の D は自然数の集合となる. これは無矛盾な公理系は自然数によるモデルを持つことを証明している. なぜ数を数えるという (悪くいえば微妙な) ことが数学というかくも大きなものになったのだろうかという問いに対し完全性定理は, あらゆる論理の基本であるからと答えていると取れなくもない.

因に, ゲーデルの不完全性定理を御存じだろうか. 数学或いはそれに準じる厳密に定義された体系はその完全性をその体系自身では証明できないといった内容の定理である. ここまで示すともっと夢のあることが語れるのだが, 興味があったら調べてみてほしい (あくまでも最後まで無責任).

VI 参考文献

『ゲーデルの世界』 廣瀬健・横田一正 著 海鳴社

<http://www.i.kyoto-u.ac.jp/~akihiro/lectures/FIS/predlogic07.pdf#search='%C2%D0%BE%DD%B5%AD%B9%E6>

パズル七則

去年も掲載したパズル七則が今年もやってきました。

ルール

- ①計算しながら左上のスタートマスから右下のゴールまでたどって正しい計算式になるようにする。
- ②縦か横にしか移動できず、同じマスを通ることはない。
- ③計算方式は卓上電卓方式である。例： $2+1\times 6=18$ (8ではない!!)

例題をやってみよう。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | + | 1 | × |
| × | 3 | - | 6 |
| 1 | + | 3 | = |
| - | 1 | - | 5 |

解答例： $2\times 1+3=5$

さて、次の問を解いてみよう。答えが何通りもあるものもあります。

問題 1

| | | | | |
|---|---|----|---|---|
| 8 | ÷ | 6 | × | 5 |
| + | 4 | + | 3 | ÷ |
| 5 | + | 1 | + | 3 |
| × | 9 | ÷ | 7 | = |
| 4 | - | 10 | + | 6 |

問題 4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|
| 2 | + | 7 | + | 1 | × |
| × | 2 | ÷ | 4 | × | 3 |
| 1 | + | 3 | ÷ | 7 | - |
| ÷ | 4 | - | 2 | × | 3 |
| 3 | - | 1 | + | 6 | = |
| × | 4 | - | 7 | + | 10 |

問題 2

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| 1 | + | 2 | × | 4 |
| × | 2 | - | 4 | ÷ |
| 2 | ÷ | 4 | + | 8 |
| - | 4 | ÷ | 8 | + |
| 4 | + | 8 | = | 15 |

問題 5

| | | | | | |
|---|---|---|---|----|-----|
| 5 | - | 4 | + | 4 | ÷ |
| × | 7 | - | 9 | × | 4 |
| 8 | + | 3 | ÷ | 3 | + |
| × | 2 | ÷ | 6 | - | 9 |
| 4 | ÷ | 7 | × | 10 | = |
| + | 5 | + | 2 | = | 105 |

問題 3

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| 2 | + | 8 | - | 4 |
| + | 9 | ÷ | 2 | × |
| 1 | × | 7 | - | 5 |
| + | 3 | + | 4 | = |
| 3 | × | 3 | = | 11 |

問題 6

| | | | | | | | |
|----|----|---|---|----|---|----|----|
| 13 | + | 4 | + | 28 | ÷ | 11 | + |
| × | 10 | ÷ | 9 | × | 2 | + | 4 |
| 7 | - | 3 | - | 5 | ÷ | 9 | + |
| × | 23 | - | 2 | + | 2 | + | 1 |
| 4 | + | 6 | - | 7 | ÷ | 12 | = |
| - | 19 | ÷ | 3 | + | 9 | - | 16 |

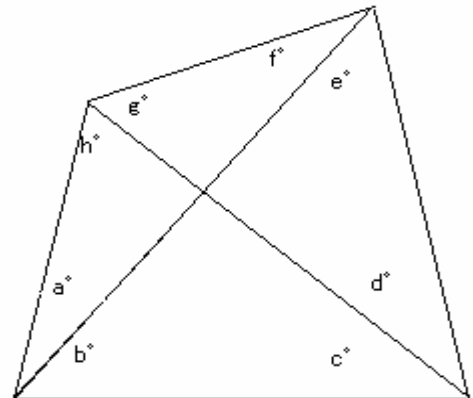
整角四角形について

高1 徳満凜也

第1章 はじめに

整角四角形とは、下図において、 a, b, c, d, e, f, g, h の値がすべて整数になる四角形のことを言う。それからできる問題である整角四角形問題と言うのは、 a, b, c, d が判明している時に f を求める問題のこと(別のパターンもあるが、この研究では言算で求めることはできないために、補助線が必要であることが多い。当然 a, b, c, d がどんな数でも整角四角形が成立するわけではない。また、『ラングラーの問題』もしくは『フランクリンの凧』と呼ばれる整角四角形問題は数ある初等幾何の難問の中でも良く知られたものである。これについては3章で説明する。尚、自明な角度計算はおおむね省略してある。

図1



第2章 定理、定石

本題に入る前に基本的な定理、有用な定石をいくつか示しておくことにする。

①円周角の定理

右図において

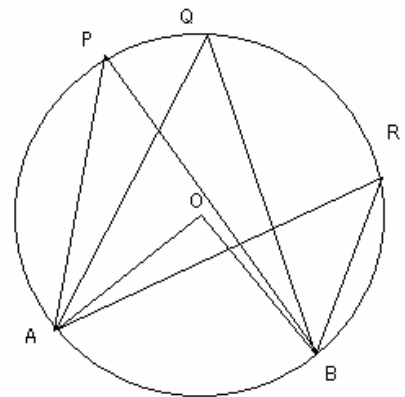
$$\angle APB = \angle AQB = \angle ARB \left(= \frac{1}{2} \angle AOB \right)$$

が成り立つ。

証明は『共円』を参照。

逆 ($\angle APB = \angle AQB$ ならば、 A, B, P, Q, R は同一円周上) も成り立つ。

図2



②内心定理

三角形の各頂角を二等分する直線は一点で交わる。
また、この点を内心と呼ぶ。

③傍心定理

三角形の一つの頂角の二等分線と残りの頂点の外角の二等分線は一点で交わる。
また、この点(3個ある)のことを傍心と呼ぶ。

④定石 I

図3で

$$a = d \text{ ならば、 } x = c^\circ$$

解説

$a = d$ から円周角の定理の逆より 4点 A, B, C, D は同一円周上なので、円周角の定理から $x = c^\circ$ がわかる。

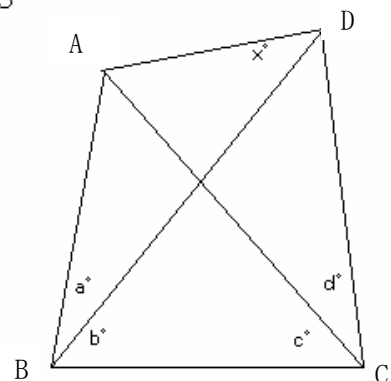
⑤定石 II

図3において、 $c = a + b, d = 90 - b$ ならば $x = a$

解説

ABCD が、図2の $OABR$ に対応している事は容易に確認でき、 $AB = AD$ より $x = a$ がわかる。

図3



⑥定石 III

図3において、 $a = b, c = 90 - a$ ならば $x = 90 - d$

解説

$\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ において、 BD は共通、 $AB = BC$ 、 $\angle ABD = \angle CBD$ なので $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ は合同 (二辺夾角相等)。 $\angle ADB = \angle CBD$ だから、
 $x = 180 - a - (90 - a) - d = 90 - d$

第3章 整角四角形問題とその解法の例

①

図3において $a = 20, b = 60, c = 50, d = 30$ の時 (ラングラーの問題)

解法

図4のように補助線を引き記号を定める。

四角形 $ABCE$ において定石IIIより

$$\angle AEB = 90 - 30 = 60$$

F は $\triangle ABE$ の内心に他ならないので、

$$\angle EAF = \frac{\angle BAE}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

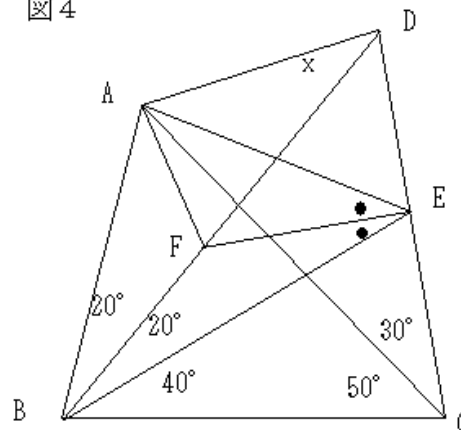
$$\angle BDC = 40$$

$$\angle EAF = \angle BDC$$

円周角の定理の逆から A, F, E, D は同一円周上なので円周角の定理から、

$$x = \angle AEF = \frac{60}{2} = 30$$

図4



②

図3において $a = 24, b = 24, c = 56, d = 62$ の時

解法

図5のように補助線を引き記号を定める。

$$\angle ABD = \angle CBD$$

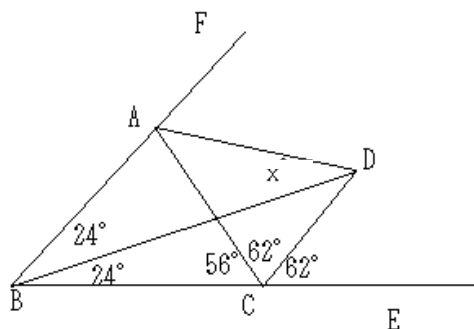
$$\angle ACD = \angle ECD$$

なので D は $\triangle ABC$ の傍心の一つに他ならない。

$$\angle CAD = \angle FAD = \frac{104}{2} = 52$$

$$x = 24 + 56 - 52 = 28$$

図5



③

図3において $a = 10, b = 70, c = 50, d = 30$ の時

解法

図6のように補助線を引き記号を定める。

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ において、

BD は共通

$$AB = EB \quad (\because AB = BC, EB = BC)$$

$$\angle ABD = \angle EBD$$

$\triangle ABD$ と $\triangle EBD$ は合同 (二辺夾角相等)

$$\therefore \angle ADB = \angle EDB \dots\dots I$$

四角形 $FBCE$ において定石Iを適用すると、

$$\angle CFE = 60^\circ$$

となるので

$$\angle DFE = 60^\circ$$

$\triangle DFE$ と $\triangle CFE$ において

$$\angle DFE = \angle CFE$$

FE は共通

$$DF = CF \quad (\because \angle FDC = \angle FCD = 30^\circ)$$

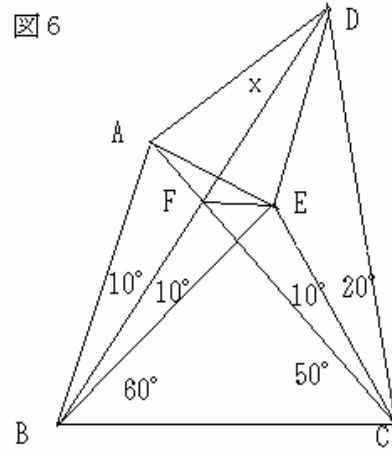
なので $\triangle DFE$ と $\triangle CFE$ は合同 (二辺夾角相等)。

$$\therefore \angle FDE = \angle FCE = 10^\circ$$

I より

$$x = \angle FDE = 10^\circ$$

図 6



④

図 3 において $a = 10, b = 10, c = 30, d = 110$ の時

解法

図 7 のように補助線を引き記号を定める。

四角形 $CABE$ において定石 II を適用すると、

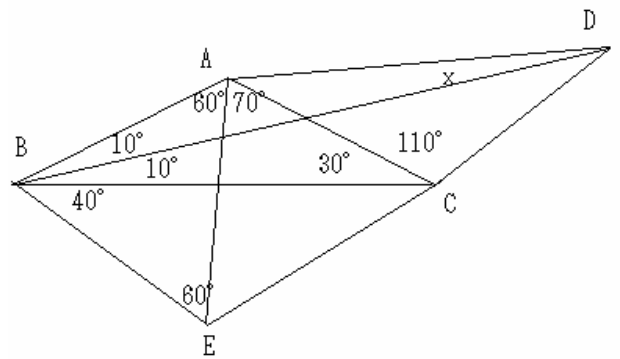
$$\angle BCE = 40^\circ$$

$$\angle ECD = 180^\circ$$

つまり ECD は一直線上であり $\angle AEC = 40^\circ$ なので定石 II が四角形 $ABED$ で適用でき、

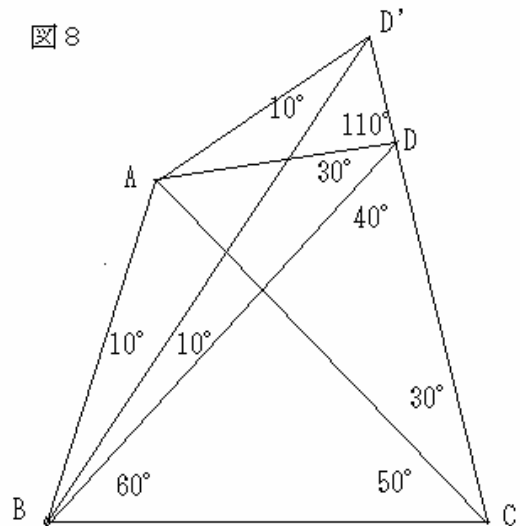
$$x = 10^\circ$$

図 7



これで四つの整角四角形問題を解いたわけで、この章も終わりなのだが、次章に行く前に①と③を見比べてほしい。角度の類似に気付くだろう。この二つの整角四角形を重ね合わせると図 8 のようになる。図中の四角形 $ABDD'$ は④の図形に他ならない。私は④の整角四角形をこのようにして考え出した。次章では整角四角形をこういった方法で作ることを扱う。

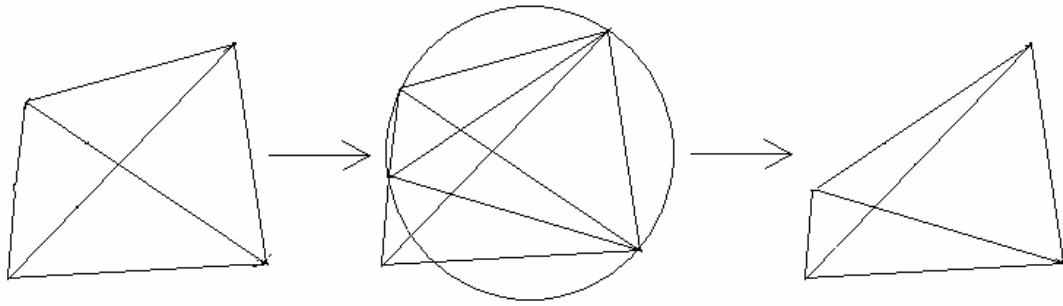
図 8



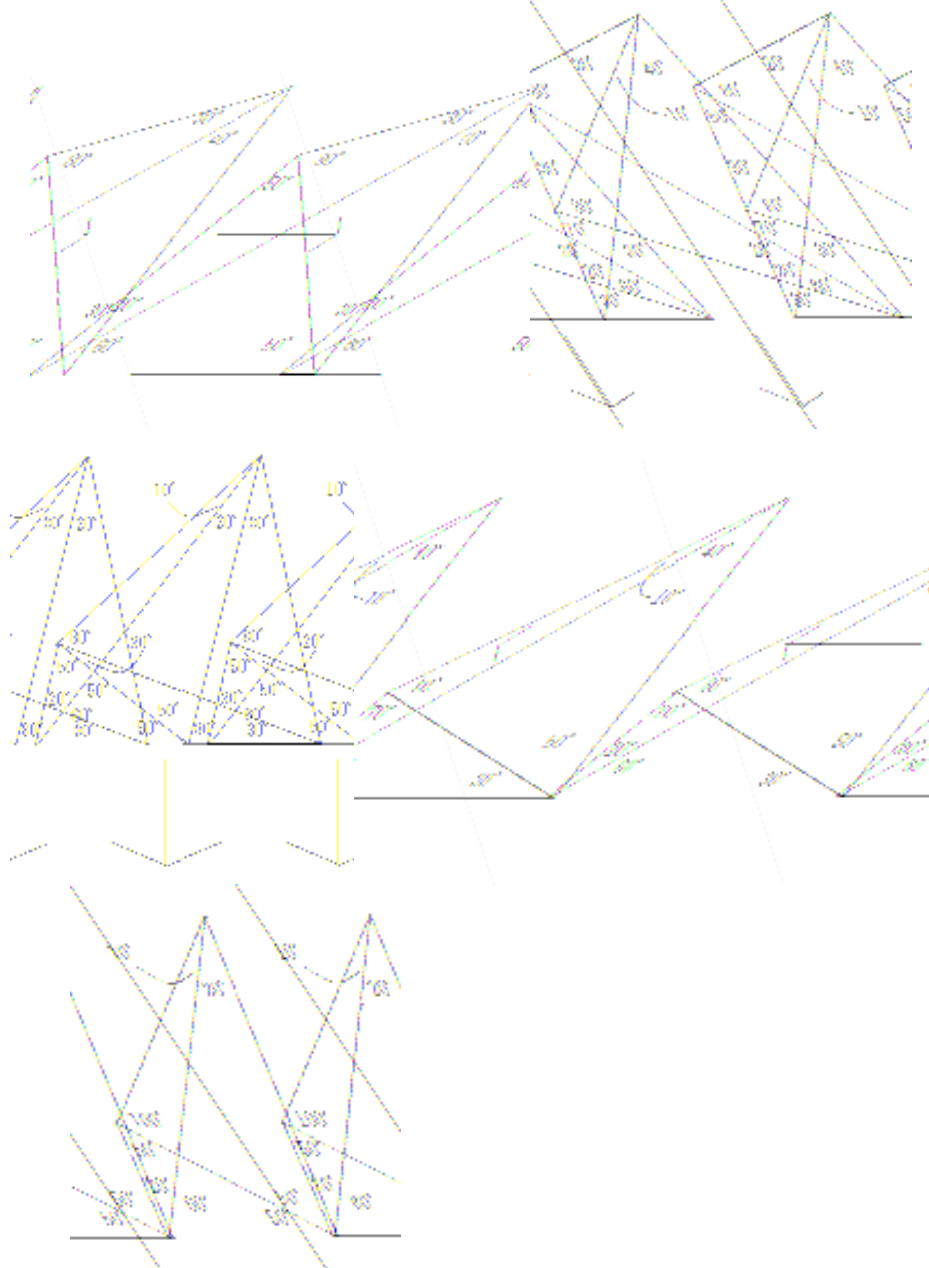
第四章 整角四角形の生成

前章で予告したとおり、この章では既存の整角四角形から新たな整角四角形を生成させる方法について書く。重ね合わせで整角四角形を作り出すのだが、ここで定石 I が役に立つ。方法を大まかに図解すると下のようになる。尚、定石 I を元にした四角形を円に内接させて書いたが、これは分かり易さのためで、この方法に直接関与するものではない。

図 9



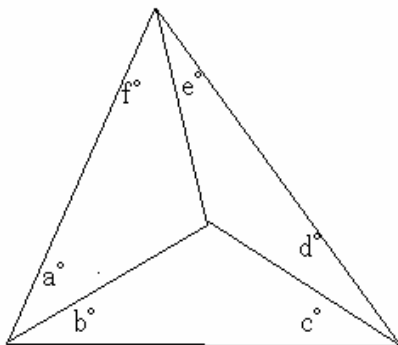
角度の関係で、これとは多少の違いが生ずることもあるが、元の整角四角形が円に内接しない限り、生成は可能である。実際にラングラーの整角四角形を元にこの方法を実行してみる。



以上の操作で、未知の整角四角形が二つ生まれた。図を見ただけでは分かり難いと感じた場合は、決して難しい操作はしていないので、自身の手で確かめればすぐに合点がいくだろう。

最初の整角四角形の角が全て 10 の倍数であるので生成されるものも全てそうなるため、重複に気をつけるこ

とが必要がある。ここで10の倍数を作らないように、傍心や定石Ⅱ,Ⅲで作られた整角四角形を元に生成すれば重複しづらくなるのではないかと考える人もいるだろうが、それらから生成されるものはなぜか自明、すなわち傍心か定石Ⅱ,Ⅲのどれか、になってしまう。そのことについて一般的に検証はしていないのだが推測するにその理由は、自明な整角四角形と非自明なそれとの間に根本的な断絶があるからだと思う。いつか、非自明なものを生成できる方法を作り出したいものである。余談だが、整角三角形(下図で a, b, c, d, e, f が整数)と呼ばれる図形がある。これも定石Ⅰの利用で整角四角形との関連性を見出すことができる。主題から外れるので詳しい方法などは割愛するが、 a, b, c, d, e, f の組み合わせの例をあげるとすれば、 $(15, 30, 15, 30, 75, 15)$ や、 $(60, 20, 30, 20, 10, 40)$ がある。



第5章 あとがき

結局何が言いたかったのかと言われるかもしれない。特に目的があるように書いてあるようには見えないし、そうしたつもりもないからだ。では何のために書いたのかと言えば、初等的なものを見つめ直すためである。初等的なものには高等的なものとは違う独特の魅力的な難しさがあると思う。つい最近、私は高等数学(といっても初歩だが)に毒されていた。正直、数学が嫌いになりかけたこともあった。どうしたものかと悲観していた時、なぜだか分からないが、ふと頭の片隅にあったラングラーの問題を書き出してみたのだ。私は今まで解けなかったそれを考えぬき、解答に到達することが出来た。久しぶりに心から嬉しいと感じた。この時、私が数学に惹かれた訳を思い出すことに成功したのだった。だから、この研究は私の目を覚ましたラングラーの問題、すなわち初等的なものに対する私からの敬意と感謝でもあるのだ。

もし、この文章に目を通してくださっている方の中で、数学が嫌いになりそうだ、もしくは最初から嫌いだという方がおられれば、是非とも四章で出来た整角四角形を問題にして解いてみることをお勧めする。そのことが、そういった状態から脱却する些細なきっかけにでもなれば、筆者としては最大の幸福であるし、それが最大の目的でもある。

※参考文献

問題解法幾何学辞典 (笹部貞市郎著 聖文新社)

フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

(<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A1%E3%82%A4%E3%83%B3%E3%83%9A%E3%83%BC%E3%82%B8>)

数学教材の部屋

(<http://homepage2.nifty.com/sintakenoko/>)