ラグランジュ方程式

2012 年 3 月 18 日

1 イントロ

ラグランジュ方程式を導出して、その共変性を確認する。

2 ラグランジュ方程式

ここでは、変換則に合わせて、上付き、下付き添え字を使い分けている。以下では拘束条件はレオノーマスでも構わない。(しかし滑らか)
仮想変位に対して

$$\sum_{\alpha} \mathrm{F}'_{\alpha} \cdot \delta \mathrm{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\mathrm{F}'_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \right) \delta q^i = 0$$

の関係が有った。(仮想変位は時間を止めて考える事に注意)
これを

$$m \ddot{\mathrm{r}}_{\alpha} = \mathrm{F}'_{\alpha} + \mathrm{F}_{\alpha}$$

を使って書きかえると

$$\sum_{\alpha} \left(\mathrm{F}_{\alpha} - m_{\alpha} \ddot{\mathrm{r}}_{\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \delta q^i = 0$$

を得る。
これは、レオノーマスな拘束条件でのつりあいの条件を与えるダランベールの原理という。
δ_{q^i} について独立なので

$$\sum_{\alpha} \left(\mathrm{F}_{\alpha} - m_{\alpha} \ddot{\mathrm{r}}_{\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} = 0$$

これを式変形すると

$$\sum_{\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_{\alpha} \dot{\mathrm{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \right) - m_{\alpha} \dot{\mathrm{r}_{\alpha}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \right) \Bigg) = \sum_{\alpha} \mathrm{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i}$$

となる。
一方、動力学では

$$\dot{\mathrm{r}}_{\alpha} = \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial t}$$

より

$$\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}=\frac{\partial \dot{\mathrm{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}$$

(デカルト座標は一般化座標と時間のみで定まる。しかし、速度は一般化速度も定まらないと定まらない。)
また、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}\right)&=\frac{\partial^2 \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j\partial q^i}\dot{q}^j+\frac{\partial^2 \mathrm{r}_\alpha}{\partial t\partial q^i}\\&=\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j}\dot{q}^j+\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial t}\right)=\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\cdot\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}\right)-m_\alpha\dot{\mathrm{r}_\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}\right)\Bigg)\\&=\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\cdot\frac{\partial \dot{\mathrm{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}^i}\right)-m_\alpha\dot{\mathrm{r}_\alpha}\cdot\frac{\partial \dot{\mathrm{r}}_\alpha}{\partial q^i}\Bigg)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\dot{\mathrm{r}}_\alpha\right)\end{aligned}$$

そこで、運動エネルギー

$$T=\sum_\alpha \dot{\mathrm{r}}_\alpha\cdot\dot{\mathrm{r}}_\alpha$$

を用いて、一般化力がポテンシャルで表される時、

$$\mathcal{F}_i=\sum_\alpha \mathrm{F}_\alpha\cdot\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}=-\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

となるとした。
より一般に U が $q,\dot{q},t$ に依存して

$$\mathcal{F}_i=\sum_\alpha \mathrm{F}_\alpha\cdot\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i}=-\frac{\partial U}{\partial q^i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}$$

とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=-\frac{\partial U}{\partial q^i}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i}$$

ここで Lagrangian-ラグランジアンを

$$L(q,\dot{q},t)=T-U(q,\dot{q},t)$$

と定義するとラグランジュ方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$$

を得る。
また、微分演算子 $\mathcal{E}_i$ を

$$\mathcal{E}_i[L] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}$$

によって定義すると、ラグランジュ方程式は

$$\mathcal{E}_i[L] = 0$$

と書ける。

3　ラグランジアンの正則性

　ラグランジュ方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

は

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

とばらせるが、

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$$

に対して行列 A_{ij} が

$$\det A \neq 0$$

であるとき、ラグランジアン L は正則と言い、A が逆行列を持つので

$$\ddot{q}^j = (A^{-1})_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t}\right)$$

と解くことができる。
この右辺は q と $\dot{q}$ の関数になっているので、これは q についての常微分方程式なので、初期値 $q, \dot{q}$ を定めれば一意に解が定まる。

4　共変性

　一般化座標の変換に対するラグランジュ方程式の変換則を見る。
配位空間 N の座標変換

$$\Phi : \mathrm{N} \to \mathrm{N} : q \mapsto Q = \{\Phi^i(q,t)\}$$

を考える。
座標変換は微分同相写像 (全単射で逆写像も元の写像も微分可能) であるとする。
逆写像を

$$\phi : Q \mapsto = \{\psi^i(Q,t)\}$$

とする。

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k}\dot{Q}^k + \frac{\partial \phi^i}{\partial t}$$

より

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{Q}^k} = \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k}$$

が求まる。
また、逆変換のヤコビ行列を

$$J^i_k = \frac{\partial \phi^i}{\partial Q^k}$$

とする。
q 系でのラグランジアンを $L(q,\dot{q},t)$
Q 系でのラグランジアンを $L^*(Q,\dot{Q},t) = L(\psi(Q), \dfrac{\partial \phi^i(Q,t)}{\partial Q_k}\dot{Q}^k + \dfrac{\partial \phi^i(Q,t)}{\partial t}, t)$ とすると

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_i[L^*(Q,\dot{Q},t)] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{Q}^i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial Q^i} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^i}\right) - \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q^i}\right] \\
&= \frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\right) - \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^i}\right] \\
&= \frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^k}\right] = J^k_i \mathcal{E}_k[L]
\end{aligned}$$

変換 Φ がが正則で $\det J \neq 0$ ならば

$$\mathcal{E}_i[L*] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_i[L] = 0$$

を得る。
さらにラグランジアンのヘッセ行列は

$$\begin{aligned}
A^*_{ij} = \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{Q}^i \partial \dot{Q}^j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^j}\right. \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^l}{\partial \dot{Q}^i}\frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \\
&= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^k}\frac{\partial q^l}{\partial Q^i}\frac{\partial q^k}{\partial Q^j} \\
&= J^l_i J^k_j A_{lk}
\end{aligned}$$

より、J が正則ならば

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A^* \neq 0$$

より正則な変換によってラグランジアンの正則性は保たれる。

以上から、どの様な座標系でもラグランジュ方程式は満たされ、問題も変わらない。
さらに、一般化運動方程式との最大の違いは、ラグランジアンはスカラー関数なので、座標変換後の表式が容易に求まる。
一方、一般化運動方程式で出てきた、計量や第一種クリストッフェル記号の変換則はもと複雑であった。

5 第一積分

系のラグランジアン $\mathcal{E}_i[l] = 0$ によって定まる軌道 $q, \dot{q}$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}I}(q, \dot{q}, t) = 0$$

を満たすような量 $I(q, \dot{q}, t)$ は、軌道上で保存量となり、第一積分と言う。
第一積分よって、軌道は状態空間内の部分空間に制限される。(状態空間は、配位空間のそれぞれの点に速度 $\dot{q}$ を添加したもの。数学的には N の接バンドル空間 TN の事。)

6 疑問点とか

一般化運動方程式では、うまく変数を選べば拘束力を完全に問題から除外する事ができる。
うまく変数を選ぶというのは、自由度を落として、拘束条件が初めから満たされているような変数の取り方である。
もし、振り子のケースで直交座標とすると、拘束条件を外す事ができないので、拘束条件付き微分方程式を解く必要があり、まず解けないし、数値解析も大変。