配位空間と仮想仕事の原理

2012年3月17日

1 イントロ

物理量のなす数学的な空間と、拘束条件の関係についてまとめる。

2 配位空間と拘束条件

N 個の粒子の状態を指定する $3N$ 個の一般化座標 ($3N$ 個の中に時間は含まない) のなす空間を配位空間 (phase space, configuration space) と言う。

一般には、これらの $3N$ 個のパラメーターは独立とは限らず、何らかの関係がありうる。

その様な何らかの関係を拘束条件と言う。

そうすると、 $3N$ 個の物理量に対して p 個の拘束条件がある配位空間は次の様に書ける。

$$N = \{q \in \mathbb{R}^{3N} | f_s(x) = 0, s = 0, \dots, p\}$$

もし、拘束条件が時間を陽に含む時、拘束をレオノーマス (rheonomous)、そうでないとき、スクレロノーマス (scleronomous) という。

幾何学的には配位空間は、より高次の N 空間内の超平面である。

意味のある拘束条件 ($f_s(q) = 0$ という恒等式は意味がない例) の元ではパラメーターに条件がかかり、それに応じた、拘束力が発生する。

多くの場合拘束力は一見陽にはもとまらず、問題を難しくする。

3 仮想仕事の原理

N 個の粒子のデカルト座標表示 r_α の拘束条件を満たすような微小変位を $\delta r_\alpha = (\partial_i r_\alpha) \delta q^i$ と書く。(もちろん縮約を取っている。) これを仮想変位という。

それぞれの粒子に働く拘束力を F'_α とすると、拘束力が働いている方向には微小変位しないので。

$$F'_\alpha \cdot \delta r_\alpha = (F'_\alpha \cdot \partial_i r_\alpha) \delta q^i = 0$$

粒子について和を取って

$$\sum_{\alpha} (F'_\alpha \cdot \partial_i r_\alpha) \delta q^i = 0$$

となる。

δq^i が i について独立に動かせるので (どの方向にも動かせると言っているわけではない)

$$\sum_{\alpha} F'_{\alpha} \cdot \partial_i r_{\alpha}$$

を得る。

これは拘束力について大きな制約を与える。

4 静力学での仮想仕事

静力学ではそれぞれの粒子で力がつりあっているため、拘束力とつりあう力

$$F_{\alpha} = -F'_{\alpha}$$

が粒子には働いている。

逆に言えば、これを満たすような微小な力を加えれば、仮想変位をおこす事が出来る。

仮想変位に対して F_{α} のする仕事、仮想仕事は

$$\delta W = \sum_{\alpha} F_{\alpha} \cdot \delta r_{\alpha} = - \sum_{\alpha} F'_{\alpha} \cdot \delta r_{\alpha} = 0$$

となる。

5 動力学での仮想仕事

拘束力を F'_{α} 、粒子にかかる拘束力以外の力を F_{α} とする。

この時の運動方程式は

$$m_{\alpha} \ddot{r}_{\alpha} = F_{\alpha} + F'_{\alpha}$$

拘束力はいつでも $\sum_{\alpha} F'_{\alpha} \cdot \delta r_{\alpha} = 0$ を満たすので、 F_{α} のする仕事は

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha} F_{\alpha} \cdot \delta r_{\alpha} = \sum_{\alpha} (F_{\alpha} + F'_{\alpha}) \cdot \delta r_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{r}_{\alpha} \cdot \delta r_{\alpha} \end{aligned}$$

ここで、時間発展を仮想変位ととらえれば、(実際に起きる変位は拘束条件を破らない)

$$\delta r_{\alpha} = \dot{r}_{\alpha} \delta t$$

となるので

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{r}_{\alpha} \cdot \dot{r}_{\alpha} \delta t \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^2 \right) \delta t \\ &= \delta \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

6 仮想仕事の原理

以上より次の原理 (定理) を得る

仮想仕事の原理

系がつりあうための必要十分条件は加えられた仕事のする仮想仕事⁸が 0 である。

また

$$\delta W = \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_{\alpha} \cdot \partial_i \mathbf{r}_{\alpha}) \delta q^i$$

を用いて一般化力

$$\mathcal{F}_i = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q^i}$$

を導入して

$$\delta W = \sum_i \mathcal{F}_i \delta q^i$$

と書くこともできる。

すなわち、一般化力とは、一般化座標の仮想変位に対する仮想仕事の割合としてとらえる事ができる。

特に

$$\mathbf{F}_{\alpha} = -\delta_{\alpha} U$$

を満たすポテンシャル関数 U が存在すれば静止系で

$$\delta W = \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\alpha} = -\delta U = 0$$

となり静止系ではポテンシャルが停留値を取る。

7 疑問点とか

今回やったことは、基本的には微小量での解析をしているので、なめらかでないような拘束力を含む場合はだめ。

例えば、棒に固定して運動していた球の拘束を突然解くとか。

それでもなめらかな区間では上の事は変わらず成り立つ。(いわゆる almost everywhere でなめらかであればよい。)