摂動とファインマン図形

2012 年 3 月 17 日

1　イントロ

ϕ^4 理論（Ginzburg-Landau free energy functional, Landau-Wilson model) を題材にして様々な期待値を摂動計算により求める。

2　注意点

摂動は高次になるほど収束するとは限らない。

3　ϕ^4 理論

作用が

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{r}{2}\phi^2 + g\phi^4 \right)$$

で与えられる理論を ϕ^4 理論という。
基底は $|x\rangle$ に取っている。(なので、作用のなかに x の積分がある。)
ただし、ϕ はスカラーボゾン場
例えば Ising 模型は **Hubbard-Stratonovich 変換**によって ϕ^4 理論と同値となる。
時間の積分が入っていないとか、(後に出てくる汎関数期待値の)i が抜けているんじゃねとかいろいろ突っ込み所はあると思うが、Ising モデル（の連続極限) から得られる作用は確かに上の様になる。(Hubbard-Stratonovich 変換の項でちゃんとやります。)
今回は摂動の計算がメインなので、まぁ上の様な問題設定だと受け入れてください。

4　n 点実空間相関関数

汎関数期待値は次の様に定義できる

$$< X >= \frac{\int \mathrm{D}\phi X e^{-S[\phi]}}{\int \mathrm{D}\phi e^{-S[\phi]}}$$

境界条件は、どういう状態で挟むかによる。
例えば真空期待値を求めたいのならば $\phi(0) = \phi(t) = 0$ 特に

$$C_n(x_1, \ldots, x_n) =< \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) >$$

を n 点相関関数という。
特に 2 点相関関数を Propagator とか Green 関数とか、resolvent 演算子という。
また、$g=0$ の作用 $S_0 = S|_{g=0}$ に対する期待値を

$$< X >_0 = \frac{\int \mathrm{D}\phi X e^{-S_0[\phi]}}{\int \mathrm{D}\phi e^{-S_0[\phi]}}$$

と書く。

5 自由粒子のプロパゲーター

自由粒子に対しては

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{r}{2}\phi^2 \right)$$

だが、これを運動量空間に直すと

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\phi_p(p^2+r^2)\phi_{-p}$$

よって汎関数ガウス積分から。

$$\int \mathrm{D}\phi\phi_p\phi_{p'}e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\phi_p(p^2+r^2)\phi_{-p}} = (2\pi)^d K\delta(p+p')(p^2+r)^{-1}$$

より（$\det A^{-1/2}$ とかも K に押し込んでる。）

$$< \phi_p\phi_{p'} >_0 = \delta(p+p')\frac{1}{p^2+r}$$

なので

$$\begin{aligned} G_0(x) &= < \phi(0)\phi(x) >_0 \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^d p'}{(2\pi)^d}e^{-ip'\cdot x} < \phi(p)\phi(p') > \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\frac{e^{ip\cdot x}}{p^2+r} \end{aligned}$$

例えば $d=1$ では

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\frac{e^{ipx}}{p^2+r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\sqrt{r}|x|} \end{aligned}$$

と求まる。(留数計算すれば良い。)

6 摂動展開

$$S_{int}[\phi] = g\int \mathrm{d}^d x\phi^4$$

とすると

$$S[\phi] = S_0[\phi] + gS_{int}[\phi]$$

ここで g について展開すると

$$\int \mathrm{D}\phi X[\phi] e^{-S_0 - gS_{int}} = \sum_n \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{D}\phi X[\phi] S_{int}^n e^{-S_0}$$

また

$$\int \mathrm{D}\phi e^{-S_0 - gS_{int}} = \sum_n \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{D}\phi S_{int}^n e^{-S_0}$$

より

$$\begin{aligned}
< X > &= \frac{\sum_n \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{D}\phi X[\phi] S_{int}^n e^{-S_0}}{\sum_n \frac{(-g)^n}{n!} \int \mathrm{D}\phi S_{int}^n e^{-S_0}} \\
&= \frac{\sum_n \frac{(-g)^m}{m!} \int \mathrm{D}\phi X[\phi] S_{int}^n e^{-S_0}}{\int \mathrm{D}\phi e^{-S_0}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \frac{\int \mathrm{D}\phi S_{int}^n e^{-S_0}}{\int \mathrm{D}\phi e^{-S_0}}\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} < XS_{int}^n >_0\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^n >_0\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} < XS_{int}^n >_0\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^m >_0\right)^l\right)
\end{aligned}$$

このうち、g の k 次の項を調べてみよう。

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} < XS_{int}^n >_0\right)}_{a\text{ 次}} \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^m >_0\right)^l\right)}_{b\text{ 次}}$$

の様にそれぞれ g を拾ってくると、前の項からは

$$\frac{(-g)^a}{a!} < XS_{int}^a >_0$$

が出てくる。
後ろの項はちょっと大変で、高々 b 次まで見れば良いので

$$\sum_{l=0}^{b} (-1)^l \left(\sum_{m=1}^{b} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^n >_0\right)^l$$

この l 乗展開は次の様になる

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=1}^{b} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^m >_0\right)^l &= \sum_{p_1+\cdots+p_b=b} \frac{b!}{p_1! \ldots p_b!} \prod_{i=1}^{b} \left(\frac{(-g)^i}{i!} < S_{int}^i >_0\right)^{p_i} \\
&= \sum_{p_1+\cdots+p_b=b} \frac{b!}{p_1! \ldots p_b!} \prod_{i=1}^{b} \left(\frac{(-g)^i}{i!} < S_{int}^i >_0\right)^{p_i}
\end{aligned}$$

となり、ここから g の b 次の項を取ってくるには

$$\sum_{i=1}^{b} ip_i = b$$
$$\sum_{i=1}^{b} p_i = b$$

を満たす整数の組を見つける必要がある。
ここ辺りから一般的に解こうとすると発狂することが分かってきます。
まあそれでもごり押しで $< XS_{int}^n >_0$ を計算すれば望む次数まで展開できますが、実際は低次 (1 ,2,3 次) までの展開が多いです。

7 発散問題

具体的な摂動に入る前に摂動計算の問題点を見ておく。
まず最初に注意した通り高次まで計算するほど収束が良くなるとは限らない。
さらに、摂動展開を計算していると

$$G_0(0) = \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + r}$$

の計算が出てくるがこの計算には以下の問題点がある。
d¿1 では運動量の無限大を含む方で発散する。 (an ultraviplet divergence:紫外発散)
$d \leq 2$ では運動量の 0 極限を含む方で発散する。(an infrared divergence:赤外発散)
これらの問題点はひとまずは目を瞑っておく (笑)

8 プロパゲーターの一次の摂動

$$< X >= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} < XS_{int}^n >_0 \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-g)^m}{m!} < S_{int}^m >_0 \Big)^l \right)$$

で X=$\phi(x)\phi(x')$ として、一次の項を取ってくると、前後への g の振り方は (1,0) か (0,1) なのですぐに

$$G^{(1)}(x, x') = -g \left(< \phi(x)\phi(x') \int \mathrm{d}^d y \phi(y) >_0 - < \phi(x)\phi(x') >_0 < \int \mathrm{d}^d y \phi(y)^4 >_0 \right)$$

であることが分かります。
以降は積分の記号はめんどくさいので書かないことにしますが、$\phi(y)$ 等は積分されます。
この最初の項 $< \phi(x)\phi(x')\phi(y)^4 >_0$ を計算するには、汎関数ガウス積分の Wick の定理を用いれば良いです。そのためには $\phi(x)\phi(x')\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)$ を 2 つずつのペアに区切ってプロパゲーターに入れてやれば良いです。

そうすると

$$
\begin{aligned}
&< \phi(x)\phi(x')\phi(y)^4 >_0 = 3 < \phi(x)\phi(x') >_0 [< \phi(y)\phi(y) >_0]^2 \\
&+ 12 < \phi(x)\phi(y) >_0 < \phi(y)\phi(y) >_0 < \phi(y)\phi(x') >_0 \\
&= 3G_0(x-x')G_0(0)^2 + 12G_0(x-y)G_0(0)G_0(y-x')
\end{aligned}
$$

となることが分かります。同様に

$$< \phi(x)\phi(x') >_0 < \phi(y)^4 >_0 = 3G(x-x')G_0(0)^2$$

したがって

$$G^{(1)}(x,x') = 12G_0(x-y)G_0(0)G_0(y-x')$$

となります。

9　ファインマンダイアグラム

ここで次の様な記述法を取り入れます。

$\phi(x), \phi(x'), \phi(y)$ 等の項を**頂点 vertex** として、点を打つ。
最終的に、全ての頂点は 2 つずつのペアになるので、そのペア同士に線を引くことで、ペアであることを表します。
そうすると ϕ^4 理論では、$\phi(y)$ が 4 つあるので、$\phi(y)$ からは 4 つの線が出ます。
同様に、$\phi(x), \phi(x')$ は 1 つずつなので 1 本の線が出ます。
以上をまとめると次の様になります。

ϕ^4 ファインマンダイアグラム

ϕ^4 理論の摂動計算において、$< \phi \cdots >$ の項で
1. 出てくる変数の数だけ頂点を打つ。積分変数を内点。そうでない点を外点と言う。
2. 積分される変数からは 4 つの線が出る。
3. 積分されない変数からは 1 つの線が出る。
この全ての組み合わせが Wick の定理から出てくるペアリングである。

例えば $< \phi(x)\phi(x') >_0 [< \phi(y)\phi(y) >_0]^2$ は図 1、$< \phi(x)\phi(y) >_0 < \phi(y)\phi(y) >_0 < \phi(y)\phi(x') >_0$ は図 2 の様になる。

ところで、

$$G^{(1)}(x,x') = 12G_0(x-y)G_0(0)G_0(y-x')$$

の式をみると、図 1 の様に分離した図形が出てこない。
図 1 の様に外点と分離した図形があるダイアグラムを vaccum graphs 真空図形という。より一般

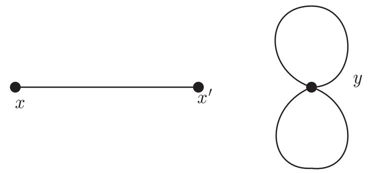

図 1

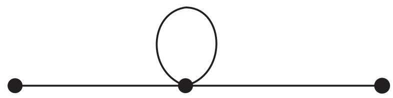

図 2

に $C_n^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$=(真空図形を含む図形) × (真空図形を含まない図形) となることを示せる。
この事を the linked cluster theorem と言う。
$< X >$ の中で真空図形の項を除いたものを $< X >^{n.v}$ と書くことにすると、一般に n 次の図形は外点につながっているものとつながっていない物に分けられるので、

$$\frac{1}{n!}{}_nC_p < XS_{int}^{n-p} >_0^{n.v} < S_{int}^p >_0$$

と書ける。
${}_nC_p$ は真空にはじき出される S_{int} の選び方。
この全ての和は $n' = n - p$ と取ることで

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{(-g)^n}{(n-p)!p!} < XS_{int}^{n-p} >_0^{n.v} < S_{int}^p >_0 = \left(\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(-g)^{n'}}{n'!} < XS_{int}^{n'} >_0^{n.v}\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-g)^p}{p!} < S_{int}^p >_0\right)$$

となる。証明終了。

10 運動量空間のファイマンダイアグラム

ϕ^4 を運動量空間で表示すると

$$\int \mathrm{d}^d y \phi^4(y) \to \frac{1}{L^d}\sum_{p_1,\ldots,p_4}\phi_{p_1}\phi_{p_2}\phi_{p_3}\phi_{p_4}\delta_{p_1+p_2+p_3+p_4.0}$$

また、運動量表示の自由粒子のプロパゲーターも

$$G(p.p') = \delta_{p+p'} \times (\ldots)$$

の形をしているので、上でみたファインマンダイアグラムの他の次のルールが運動量空間ではあることが分かる。

運動量空間のファインマン図形

1. ファインマン図形を書く。
2. 全ての外点は運動量を持っている。
3. 線は運動量をそのまま伝える。(自由粒子のプロパゲーターの性質)
4. 内点では運動量の和は 0 になっている。(S_{int} の運動量表示の性質)

追加のルールが入っただけで、実空間で成り立っていた事は全て運動量空間でも成り立つ。

11　疑問点とか

ここでやったのは経路積分的な導出の仕方で、QED とかだと専ら第二量子化的な導出が使われる事が多い？
ゲージ粒子が入った時とかはこの先やる事に必要になったらやる。