一般化測定

2012 年 3 月 16 日

1　イントロ

測定問題の一般化として、測定系と被測定系の時間発展を調べる。
現実の系は必ず測定系-被測定系の相互作用があるので、その様な系を考える。

2　測定被測定系の時間発展

以下では $\hbar = c = 1$ の自然単位系を用いる。被測定系 S と測定系 A のヒルベルト空間をそれぞれ H_S, H_A とし、2 つ合わせた系のヒルベルト空間を $H_{S+A} = H_S \otimes H_A$ とする。
S+A は孤立系とする。
それぞれの系のハミルトニアンを $\hat{H}_S, \hat{H}_A$、相互作用ハミルトニアンを $\hat{H}_{int}$ とすると、全系のハミルトニアン $\hat{H}_{S+A}$ は

$$\hat{H}_{S+A} = \hat{H}_S \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{H}_A + \hat{H}_{int}$$

となる。
時刻 $0 < \tau < \tau'$ に対し、次の過程を考える。
$t = 0$ 測定値を持った状態 (測定直後の状態)
$\downarrow$ S と A が相互作用して時間発展
$t = \tau$
$\downarrow$ S と A が相互作用せず時間発展
$t = \tau'$
$\downarrow$
A に対して理想測定

t=0 で系が単純積の状態

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_S\rangle\,|\psi_A\rangle \in H_{S+A}$$

ただし、$|\psi_S\rangle \in H_S, |\psi_A\rangle \in H_A$ とする。
一般のエンタングル状態からの発展への一般化は簡単。

S の測定したい物理量 Q の演算子 $\hat{Q}$ の固有状態で展開すると

$$|\psi_S\rangle = \sum_{q,l} \psi(q,l) \, |\psi_S(q,l)\rangle$$

(q は固有値のインデックス、l は縮退のインデックス)
実際に読み取る測定系 A の物理量 R の演算子 $\hat{R}$ の固有状態で展開するが、最初の状態で測定系は r_0 を測定した状態だとすると

$$|\psi_A\rangle = \sum_m \psi_A(r_0,m) \, |r_0,m\rangle$$

(r は固有値のインデックスで m は縮退のインデックス)
また、$[\hat{Q},\hat{R}] = [\hat{Q},\hat{H}_A] = [\hat{H}_S,\hat{R}] = [\hat{H}_S,\hat{H}_A] = 0$ とする。
この時、S+A を相互作用を許して時間発展させると

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle &= e^{-i\hat{H}_{S+A}\tau} \, |\psi_S\rangle \, |\psi_A\rangle \\ &= \sum_{q,l} \sum_m \psi_S(q,l)\psi_A(m) e^{-i\hat{H}_{S+A}\tau} \, |q,l\rangle \, |r_0,m\rangle \end{aligned}$$

ここで、

$$e^{-i\hat{H}_{S+A}\tau} \, |q,l\rangle \, |r_0,m\rangle = \sum_{q',l'} \sum_{r',m'} u_{q,l,r_0,m}^{q',l',r',m'} \, |q',l'\rangle \, |r',m'\rangle$$

と展開する。
展開係数は

$$u_{q,l,r,m}^{q',l',r',m'} = \langle q,l| \, \langle r,m| \, e^{-i\hat{H}_{S+A}\tau} \, |q',l'\rangle \, |r',m'\rangle$$

で定まる。
この時

$$|\psi(\tau)\rangle = \sum_{q,l} \left[\psi_S(q,l) \sum_{q',l'} \left(|q',l'\rangle \sum_{m,r',m'} \psi_A(r_0,m) u_{q,l,r_0,m}^{q',l',r',m'} \, |r',m'\rangle \right) \right]$$

この後、相互作用をなくし、自由に時間発展させると

$$|\psi(\tau')\rangle = e^{-i(\hat{H}_S+\hat{H}_A)(\tau'-\tau)/\hbar} \, |\psi(\tau)\rangle$$

ここで、別の測定系 A' によって、A の測定値を読みだす。
これは、理想測定と仮定して射影仮説を用いると、射影演算子

$$\hat{\mathcal{P}}_R(r) = \hat{1} \otimes \sum_m |r,m\rangle \, \langle r,m|$$

として、ある値 r を得る確率は

$$\begin{aligned} P_R(r) &= \| \hat{\mathcal{P}}_R(r) \, |\psi(\tau')\rangle \, \|^2 \\ &= \| \hat{\mathcal{P}}_R(r) e^{-i(\hat{H}_S+\hat{H}_A)(\tau'-\tau)} \, |\psi(\tau)\rangle \, \|^2 \end{aligned}$$

また、r という値を測定した後の状態 (the post-measurement state) は

$$
\begin{aligned}
|\psi_r(\tau')\rangle &= \frac{1}{\sqrt{P_R(r)}}\hat{\mathcal{P}}_R(r)\,|\psi(\tau')\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{P_R(r)}}e^{-i(\hat{H}_S+\hat{H}_A)(\tau'-\tau)}\,|\psi(\tau)\rangle
\end{aligned}
$$

となる。
測定後の密度演算子は

$$
\hat{\rho}_r(\tau') = \mathrm{Tr}_A(|\psi_r(\tau')\rangle\,\langle\psi_r(\tau')|)
$$

となり、測定後の任意の物理量の期待値は

$$
< X >_r = \langle\psi_r(\tau')|X|\psi_r(\tau')\rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_r(\tau')\hat{X}]
$$

となり。
これにより、測定系-被測定系の測定後の R の測定値が r であった時の系の状態が完全に分かる。
これから、被測定系の知りたい物理量 Q の値を推定できる。

3 疑問点とか

まぁ、言っていることはそんな突拍子もない事を言っているわけじゃなくて、知りたい物理量を直接することはできなくて、測定系-被測定系の測定系で物理量を測定することで被測定系の物理量を推定する事しかできない。
しかし、良く考えてみると現実の測定はもっと複雑で
被測定系-測定系-測定系-・・・
と延々と続いている。
このどこで理想測定を行うかという任意性の問題がある。
しかし、実の被測定系-測定系の合成系を含んでいればどこで理想測定を行ったとしても理論の予想する結論が変わらないということが示される。
それはまた次の話・・・