

松原表現

2012 年 3 月 16 日

1 イントロ

分配関数の経路積分をフーリエ変換して、松原振動数を導入し物理量の計算をする。
ここでは例として相互作用がない系の自由エネルギーを求めた。

2 松原振動数

分配関数の経路積分での表現は

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\psi(0)=\xi\psi(\beta)} D(\bar{\psi}, \psi) e^{-S[\bar{\psi}, \psi]} \\ S &= \int_0^\beta d\tau [\bar{\psi} \partial_\tau \psi + H(\bar{\psi}, \psi) - \mu N(\psi, \psi)] \\ &= \int_0^\beta d\tau \left[\sum_{ij} \bar{\psi}_i(\tau) [(\partial_\tau - \mu)\delta_{ij} + h_{ij}] \psi_j(\tau) + \sum_{ijkl} V_{ijkl} \bar{\psi}_i(\tau) \bar{\psi}_j(\tau) \psi_k(\tau) \psi_l(\tau) \right] \end{aligned}$$

であった。

ただし

$$\xi = \begin{cases} +1, & bosons \\ -1, & fermions \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\omega_n} \psi_n e^{-i\omega_n \tau} \\ \psi_n &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \psi(\tau) e^{i\omega_n \tau} \end{aligned}$$

とフーリエ変換すると境界条件より $T = 1/\beta$ として

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T, & bosons \\ (2n+1)\pi T, & fermions \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

この逆温度のフーリエ変換の事を松原振動数と言い、S の表現

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^\beta d\tau \left[\sum_{ij} \bar{\psi}_i(\tau) [(\partial_\tau - \mu)\delta_{ij} + h_{ij}] \psi_j(\tau) + \sum_{ijkl} V_{ijkl} \bar{\psi}_i(\tau) \bar{\psi}_j(\tau) \psi_k(\tau) \psi_l(\tau) \right] \\
&= \sum_{i,j,n} \bar{\psi}_{in} (-i\omega_n - \mu) \delta_{i,j} + h_{i,j} \psi_{jn} + \frac{1}{\beta} \sum_{i,j,k,l,n_i} V_{ijkl} \bar{\psi}_{in_1} \bar{\psi}_{jn_2} \psi_{kn_3} \psi_{ln_4} \delta_{n_1+n_2, n_3+n_4}
\end{aligned}$$

を松原表現という。

3 相互作用が無い系

相互作用がない時ハミルトニアン ϕ_a の直交系 ϕ_a を用いて松原表現は

$$\begin{aligned}
Z &= \int D(\bar{\phi}, \phi) e^{-\sum_{a,n} \bar{\phi}_{an} (-i\omega_n + \zeta) \phi_{an}} \\
&= \prod_a \int D(\bar{\phi}_a, \phi_a) e^{-\sum_n \bar{\phi}_{an} (-i\omega_n + \zeta) \phi_{an}} \\
&= \prod_a \prod_n [\beta(-i\omega_n + \zeta_a)]^{-\xi}
\end{aligned}$$

ただし、 $\zeta_a = \varepsilon_a - \mu, \varepsilon_a$ はハミルトニアン ϕ_a の固有値。

肩の ξ はボゾン系かフェルミオン系かによるガウス積分の値の違い。したがってボルツマン定数を1として

$$F = -T \ln Z = T \xi \sum_{an} \ln[\beta(-i\omega_n + \zeta_a)]$$

となり、松原振動数についての和を計算する必要がある。

4 松原振動数の和

一般に松原振動数についての和

$$S = \sum_n h(\omega_n)$$

を求めたいという状況がしばしば発生する。

これを求める技巧的な方法が存在する。

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\beta}{\exp \beta z - 1}, & \text{bosons} \\ \frac{\beta}{\exp \beta z + 1}, & \text{fermions} \end{cases}$$

という関数は $z = i\omega_n$ に1位の極を持つ。

これらはすべて虚軸上にある。そこでCを図1の様にとると

$h(-iz)$ の極が虚軸上に無いとすると

$$\frac{\xi}{2\pi i} \oint_C dz g(z) h(-iz) = \xi \sum_n \text{Res} g(z) h(-iz) \Big|_{i\omega_n} = \sum_n h(\omega_n) = S$$

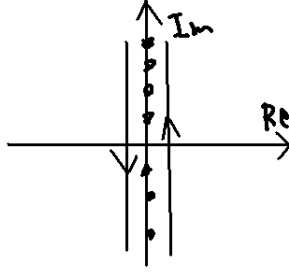


図1 経路 C

さらに、 $g(z)h(-iz)$ が $|z| \rightarrow \infty$ で z^{-1} よりも早く収束するならば、図2の様に $h(-iz)$ の極を回避して経路を大きく取りなすと

$$S = \frac{\xi}{2\pi i} \oint_{C'} dz h(-iz) g(z) = -\xi \sum_k \text{Res} h(-iz) g(z) \Big|_{z=z_k}$$

ただし、 z_k は $h(-iz)$ の極

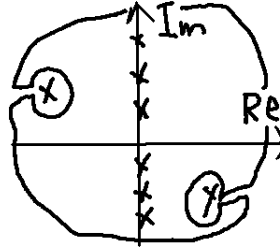


図2 経路 C'

これより、松原周波数の和をいくつかの特異点の解析で得られる事が分かった。
今回使った様な手法は複素解析では良く用いられる。今回使った関数以外にもうまい関数を持ってくれば求められる事がある。

5 相互作用が無い系の自由エネルギー

$$F = -T \ln Z = T\xi \sum_{an} \ln[\beta(-i\omega_n + \zeta_a)]$$

であった。

$$h(\omega_n) = \xi T \ln[\beta(-i\omega_n + \zeta)]$$

と置き

$$S = \sum_n h(\omega_n)$$

を求める。

$$h(-iz) = T\xi \ln[\beta(-z + \zeta)]$$

となり、この極は実軸に連続的に分布している。さらに

$$zg(z)h(-iz) \rightarrow^{|z| \rightarrow \infty} 0$$

は明らか。

したがって、

$$S = \frac{T}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\zeta}^{\infty} dx g(x) (\ln(-(x - i\varepsilon) + \zeta) - \ln(-(x + i\varepsilon) + \zeta))$$

ただし、この経路では $h(-iz)$ の特異点に経路を接触させず主値としている。また $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で $g(x)$ は変わらないことなどを使った。

さらに積分範囲を $-\infty$ まで拡大しても、特異点をはさんでいないところは $+$ と $-$ で打ち消しあうので

$$S = \frac{T}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) (\ln(-(x - i\varepsilon) + \zeta) - \ln(-(x + i\varepsilon) + \zeta))$$

部分積分して

$$S = \frac{-\xi T}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ln(1 - \xi e^{-\beta x}) \left(\frac{1}{(x - i\varepsilon) - \zeta} - \frac{1}{(x + i\varepsilon) - \zeta} \right)$$

これはディラックの恒等式より (例えば http://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/Green_1.pdf に詳しい, 簡単に言うと $\frac{1}{x}$ の周りの主値はデルタ関数となる)

$$S = \xi T \ln(1 - \xi e^{-\beta \zeta})$$

となる。以上より

$$F = \xi T \sum_a \ln(1 - \zeta e^{-\beta(\varepsilon_a - \mu)})$$

となり、良く知る結果が出てきた。

6 疑問点とか

第二量子化のフェルミオン場の経路積分でした。

松原振動数を導入すると多くの問題が複素関数の特異点解析になります。