

Fermion 系の経路積分と分配関数

2012 年 3 月 16 日

1 イントロ

Fermion 系の第二量子化の経路積分について解説。

第一量子化の経路積分のレシピ：「演算子を数値に置き換える」に従って、今回は第二量子化の消滅演算子の固有状態である Coherent states for Fermion を導入する。

しかし、Fermion 系の場合は、Boson 系と異なり、その反交換関係より通常の可換代数系内では固有状態を作れない。

そこで扱う空間を広げてグラスマン数を導入する。

ここでは経路積分の例として、分配関数の計算をあげている。

2 試行錯誤

Fermion 系の消滅演算子 a_i に対しコヒーレント状態が求まったとする。

$$a_i |\eta\rangle = \eta_i |\eta\rangle$$

この固有値が $\eta_i \in \mathbb{C}$ とすると

$$\begin{aligned} a_i a_j |\eta\rangle &= \eta_j \eta_i |\eta\rangle \\ &= -a_j a_i |\eta\rangle = -\eta_i \eta_j |\eta\rangle \end{aligned}$$

より

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i$$

と固有値も反交換関係を持っている事が分かる。

当然これは $\mathbb{C}$ の範囲では実現できない。

3 Grassmann 代数

量子力学で扱っている空間は無限次元ヒルベルト空間=完備ノルムを持つ $\mathbb{C}$ 上の無限次元ベクトル空間である。

これを拡張して Grassmann 代数を作る。

体 K 上のベクトル空間 V を含む Grassmann 代数 G とは

1. $K \subset G, V \subset G$
2. 2つの演算 $+, \wedge$ があり、 $+$ について可換群で $\wedge$ については反可換半群で K 上のベクトル空間となる。

例えば $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$ に対し次の様な構成は Grassmann 代数となる

$$\begin{aligned}\eta_1, \eta_2, \eta_1 \wedge \eta_2 &\in G \\ \eta_1 \wedge \eta_2 &= -\eta_2 \wedge \eta_1 \\ G &= \{c_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_1 \wedge \eta_2 \mid c_i \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$\wedge$ 積により、 K や V は特徴的な系列を持つ。 $G_0 = K, G_1 = V$ とし

$$G_n = \{a \wedge b \mid a, b \in G_{n-1}\}$$

とし、 G_{n-1} から G_n を得る写像を $\wedge : G_{n-1} \mapsto G_n$ と書く。

すると、 $\wedge$ によって、次の様な系列を得る。

$$G_0 \mapsto G_1 \mapsto G_2 \mapsto \dots$$

Grassmann 代数 G とはこのようにして得られた系列の直和である。

$$G = \bigoplus G_n$$

Grassmann 代数上の性質としては、 $\eta \wedge \eta = -\eta \wedge \eta$ 等は零元となる。

また、 $(\eta_1 \wedge \eta_2)$ は他の要素と $\wedge$ について可換

例えば $(\eta_1 \wedge \eta_2) \wedge \eta_3 = \eta_3(\eta_1 \wedge \eta_2)$

4 Grassmann 代数上の演算

1 変数 Grassmann 代数上の多項式は必ず一次式以下で $f(\eta) = f(0) + f'(0)\eta$ と書ける。

次に、微分や積分を定義する。ただし、実数の場合等と違い、上の性質から有限次数の多項式だけを相手にすれば良いので定義はものすごく簡単である。

Grassmann 数の微分とは

$$\begin{aligned}\partial_{\eta_i} c &= 0, \quad \eta_i \in G_1, c \in K \\ \partial_{\eta_i} \eta_j &= \delta_{i,j}, \quad \eta_i, \eta_j \in G_1 \\ \partial_{\eta_i} (\eta_j \wedge \eta_k) &= (\partial_{\eta_i} \eta_j) \wedge \eta_k - \eta_j \wedge (\partial_{\eta_i} \eta_k), \quad \eta_j, \eta_k \in G_n\end{aligned}$$

を満たす線形写像。

例えば $\partial_{\eta_i} (\eta_j \wedge \eta_i) = -\eta_j$

積分の方は

Grassmann 数の積分とは

$$\int d\eta_i c = 0 \quad , \eta_i \in G_1 \quad , c \in K$$

$$\int d\eta_i \eta_j = \delta_{i,j} \quad , \eta_i, \eta_j \in G_1$$

$$\int d\eta_i (\eta_j \wedge \eta_k) = \left(\int d\eta_i \eta_j \right) \wedge \eta_k - \eta_j \wedge \left(\int d\eta_i \eta_k \right) \quad , \eta_j, \eta_k \in G_n$$

を満たす線形変換。

要するに、Grassmann 数上では微分と積分は同じ操作である。

この定義は不自然に思うかもしれないけど、グラスマン数上の変数変換 $\eta' = \eta + a$ に対して測度が不変とか線形写像であることを要請するところなる。

逆に言えば他の要請から異なる積分を定義することもできる。

経路積分で使う上ではこの定義で申し分ない。

ついでにグラスマン数の変数変換についてまとめる

Grassmann 数の変数変換

$g'_i = \sum_j J_{i,j} g_j$ と変数変換すると S_n を置換群として

$$\begin{aligned} g'_1 \wedge \cdots \wedge g'_n &= \left(\sum_{j_1} J_{1,j_1} g_{j_1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j_n} J_{n,j_n} g_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1 \cdots j_n} J_{1,j_1} \cdots J_{n,j_n} g_{j_1} \wedge \cdots \wedge g_{j_n} \\ &= \sum_{\{j_1 \cdots j_n\} \in S_n} J_{1,j_1} \cdots J_{n,j_n} g_{j_1} \wedge \cdots \wedge g_{j_n} \\ &= \sum_{P \in S_n} \text{sgn}(P) J_{P(1),1} \cdots J_{P(n),n} g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= \det(J) g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \end{aligned}$$

これより、変数変換に対して積分の値が変わらないためには

Grassmann 数の置換積分

$g'_i = \sum_j J_{i,j} g_j$ に対し

$$\int dg'_1 \cdots dg'_n = \int dg_1 \cdots dg_n \frac{1}{\det J}$$

以上で基本的な Grassmann 数の性質は定義し終わった。

5 Grassmann 代数上のガウス積分

以下では $\mathbb{C}$ 上のグラスマン代数について論じる。

グラスマン数の複素共役とはかかっているスカラー係数部分を複素共役取ったものだが、ベクトル

空間の基底としては η と $\bar{\eta}$ は別々に取れる。

Grassmann 数の指数関数とは次の様に定義される

Grassmann 数の指数関数

$$\exp \eta = 1 + \eta$$

これは指数関数のテイラー展開を参考にしたものである。

したがってグラスマン代数上のガウス積分は次の様になる。

積分の順番に注意。

Grassmann 数のガウス積分

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} a \eta} = a$$

ϕ をグラスマン数のベクトルとして (気に食わなかったら $\sum$ で書けばよい)

$$d(\bar{\phi}, \phi) = \prod_{i=1}^N d\bar{\phi}_i d\phi_i \text{ も順番は変えられない。}$$

$$\int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\phi^\dagger A \phi} = \det A$$

$$\int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\phi^\dagger A \phi + \nu^\dagger \phi + \phi^\dagger \nu} = \det A e^{\nu^\dagger A^{-1} \nu}$$

また、Wick の定理

$$\langle \phi_{j_1} \dots \phi_{j_n} \bar{\phi}_{i_n} \dots \bar{\phi}_{i_1} \rangle = \sum_{P \in S_n} \text{sgn} P A_{j_1 i_{P1}}^{-1} \dots A_{j_n i_{Pn}}^{-1}$$

を得る。

証明はグラスマン数の性質に気をつけさえすれば実数の場合等とほとんど同じ。

6 Fermion 系の経路積分と分配関数

Fermion 系の経路積分に戻る。

$$|\eta\rangle = e^{\sum_i \eta_i a_i^\dagger} |0\rangle$$

$$a_i |\eta\rangle = \eta_i |\eta\rangle$$

となるような η_i を全部とってきてグラスマン代数を作る。

そうすると、分配関数の経路積分的計算はほとんどボゾン系と同じである。(そうなるように定数をいじったり演算を定義した。)

実のところコヒーレント状態を構成して、完全系を確認するところまでは全く同じ計算である。

第二量子化の分配関数は

$$Z = \text{tre}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \sum_n \langle n | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle$$

$\delta = \beta/N$ と分割して $\hat{H} = \sum h_{ij} a_i^\dagger a_j + \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$ に注意して、また恒等演算子を挟みまくっていく。

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \langle n | e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \sum_n \langle n | \phi \rangle \langle \phi | e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \sum_n \langle -\phi | e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle \langle n | \phi \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \langle -\phi | e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \phi \rangle \end{aligned}$$

$\langle \phi |$ の中にグラスマン数が入っている所以符号の変化があることに注意して、とコヒーレント状態でのトレース?に書き換えて $\hat{\phi}^n \phi^m = \sum_i \hat{\phi}_i^n \phi_i^m$ とすると

$$\begin{aligned} Z &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi} \phi} \langle -\phi | \left(e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \right)^N | \phi \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}^0, \phi^0) e^{-\bar{\phi}_i^0 \phi_i^0} \prod_{n=1}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{-\bar{\phi}^n \phi^n} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \phi^n | \phi^{n+1} \rangle \langle \phi^{n+1} | \left(e^{-\delta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \right) | \phi^{n+1} \rangle \\ &= \int_{\psi^0 = -\psi^N} \prod_{n=0}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{-\bar{\phi}^n \phi^n} \prod_{n=0}^{N-1} e^{\hat{\phi}^n \phi^{n+1}} e^{-\delta(H(\bar{\phi}^n, p h i^{n+1}) - \mu N(\hat{\phi}^n, \phi^{n+1}))} \\ &= \int_{\psi^0 = -\psi^N} \prod_{n=0}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{\delta \sum_{n=0}^{N-1} [\delta^{-1} \hat{\phi}^n (\phi^{n+1} - \phi^n) + H(\bar{\phi}^n, p h i^{n+1}) - \mu N(\hat{\phi}^n, \phi^{n+1})]} \end{aligned}$$

ここで $\delta \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$D(\bar{\phi}, \phi) = \prod_{n=0}^{\infty} d(\bar{\phi}^n, \phi^n)$$

として

$$\int_{\phi(0) = -\phi(\beta)} D(\bar{\phi}, \phi) e^{-\int_0^\beta d\tau [\bar{\phi} \partial_\tau \phi + H(\bar{\phi}, \phi) - \mu N(\bar{\phi}, \phi)]}$$

となる。

ボゾン系との違いは境界条件のみである。

7 疑問点とか

第二量子化のフェルミオン場の経路積分でした。

ボゾンの場合は簡単だったけど、フェルミオンの場合は実は空間を拡張する必要があります。

収束性について何ら証明していないということは頭に入れておいた方がいいと思う。

もしかしたら、そういった微妙なところからおもしろい物理が生まれるかもしれない。