

Boson 系の経路積分と分配関数

2012 年 3 月 15 日

1 イントロ

Boson 系の第二量子化の経路積分について解説。

第一量子化の経路積分のレシピ：「演算子を数値に置き換える」に従って、今回は第二量子化の消滅演算子の固有状態である

Coherent states for bosons を導入する。

ここでは経路積分の例として、分配関数の計算をあげている。

2 コヒーレント状態

天下り

$$|\psi\rangle = \exp\left(\sum_i \phi_i a_i^\dagger\right) |0\rangle$$

は a_i の固有状態である。ただし、 $\phi_i \in \mathbb{C}$
 実際

$$\begin{aligned}
 a_i |\psi\rangle &= a_i \exp\left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right) |0\rangle \\
 &= a_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^n |0\rangle \\
 &= a_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right) \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_j \phi_j (a_j^\dagger a_i + \delta_{i,j})\right) \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right) a_i \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_i}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right) a_i |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\phi_i}{n!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle \\
 &= \phi_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_i}{(n-1)!} \left(\sum_j \phi_j a_j^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle = \phi_i |\psi\rangle
 \end{aligned}$$

より確かめられた。

またこのエルミート共役をとって

$$\langle\psi| a_i^\dagger = \langle\phi| \bar{\phi}_i$$

となる。

これより

$$\begin{aligned}
 \langle\theta|\phi\rangle &= \langle 0| e^{\sum_i \bar{\theta}_i a_i^\dagger} |\phi\rangle \\
 &= \langle 0| e^{\sum_i \bar{\theta}_i \phi_i} |\phi\rangle \\
 &= \langle 0| e^{\sum_i \bar{\theta}_i \phi_i} |0\rangle = \exp\left(\sum_i \bar{\theta}_i \phi_i\right)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\langle\phi|\phi\rangle = \exp\left(\sum_i \bar{\phi}_i \phi_i\right)$$

さらに

$$\frac{\langle\phi| n_i |\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \bar{\phi}_i \phi_i$$

となりコヒーレント固有値のノルムと粒子数期待値は等しい。

次に完全性を示すが、そのために次の定理を用いる。

群の既約表現で任意の演算子と可換なものは恒等演算子の定数倍

証明は省きますけど、そのうち群論のページで上げるかもしれないです。そこで、またもや天下りですけど $d(\bar{\phi}, \phi) = \prod_i \frac{d\bar{\phi}_i d\phi_i}{\pi}$ として（これは後々結果をフェルミオン系と合わせるためです。）

$$\begin{aligned} a_i \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} |\phi\rangle \langle \phi| &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \phi_i |\phi\rangle \langle \phi| \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) \left(\partial_{\bar{\phi}_i} e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \right) |\phi\rangle \langle \phi| \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} |\phi\rangle \left(\partial_{\bar{\phi}_i} \langle \phi| \right) \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} |\phi\rangle \langle \phi| a_i \end{aligned}$$

ですが、占有数表示の既約表現の元で、任意の演算子は $a_i, a_i^\dagger$ で表現できるので、任意の演算子と交換することから

$$\int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} |\phi\rangle \langle \phi| = c \times 1$$

ここで、両方から真空状態 $|0\rangle$ ではさんで 1 となることを規格化条件とすると

$$\int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} = 1$$

3 分配関数

第二量子化の分配関数は

$$Z = \text{tr} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \sum_n \langle n | e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle$$

$\delta = \beta/N$ と分割して $\hat{H} = \sum h_{ij} a_i^\dagger a_j + \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$ に注意して、また恒等演算子を挟みまくっていく。

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \langle n | e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \sum_n \langle n | \phi \rangle \langle \phi | e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \sum_n \langle \phi | e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | n \rangle \langle n | \phi \rangle \\ &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}_i \phi_i} \langle \phi | e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} | \phi \rangle \end{aligned}$$

とコヒーレント状態でのトレース?に書き換えて $\hat{\phi}^n \phi^m = \sum_i \hat{\phi}_i^n \phi_i^m$ とすると

$$\begin{aligned}
Z &= \int d(\bar{\phi}, \phi) e^{-\bar{\phi}\phi} \langle \phi | \left(e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right)^N | \phi \rangle \\
&= \int d(\bar{\phi}^0, \phi^0) e^{-\bar{\phi}^0 \phi^0} \prod_{n=1}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{-\bar{\phi}^n \phi^n} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \phi^n | \phi^{n+1} \rangle \langle \phi^{n+1} | \left(e^{-\delta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right) | \phi^{n+1} \rangle \\
&= \int_{\psi^0 = \psi^N} \prod_{n=0}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{-\bar{\phi}^n \phi^n} \prod_{n=0}^{N-1} e^{\hat{\phi}^n \phi^{n+1}} e^{-\delta(H(\bar{\phi}^n, \phi^{n+1}) - \mu N(\hat{\phi}^n, \phi^{n+1}))} \\
&= \int_{\psi^0 = \psi^N} \prod_{n=0}^{N-1} d(\bar{\phi}^n, \phi^n) e^{\delta \sum_{n=0}^{N-1} [\delta^{-1} \hat{\phi}^n (\phi^{n+1} - \phi^n) + H(\bar{\phi}^n, \phi^{n+1}) - \mu N(\hat{\phi}^n, \phi^{n+1})]}
\end{aligned}$$

ここで $\delta \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$D(\bar{\phi}, \phi) = \prod_{n=0}^{\infty} d(\bar{\phi}^n, \phi^n)$$

として

$$\int_{\phi(0)=\phi(\beta)} D(\bar{\phi}, \phi) e^{-\int_0^\beta d\tau [\bar{\phi} \partial_\tau \phi + H(\bar{\phi}, \phi) - \mu N(\bar{\phi}, \phi)]}$$

となる。

4 疑問点とか

第二量子化のボゾン場の経路積分でした。

ボゾンの場合は簡単だったけど、フェルミオンの場合は実は空間を拡張する必要があります。

収束性について何ら証明していないということは頭に入れておいた方がいいと思う。

もしかしたら、そういった微妙なところからおもしろい物理が生まれるかもしれない。