

ギリシア三大作図問題

2012 年 3 月 15 日

1 イントロ

ギリシアの三大作図問題について証明、解説を通じて、現代代数の有用性について触れる。

2 ギリシアの三大作図問題

ギリシアの三大作図問題とは次の 3 つの問題のこと

—— ギリシアの三大作図問題 ——

1. 円積問題: 与えられた任意の円と等しい面積を持つ正方形を作図すること
2. 立方倍積問題: 与えられた任意の立方体の体積の 2 倍の体積を持つ立方体を作図すること
3. 角三等分問題: 与えられた任意の角度を三等分し作図すること

これらを否定するにはそれぞれ問題を満たさない円、立方体、角度を見つければ良い。
ところで、そもそもここでのいう作図とは何を指すのだろうか。

3 作図

ここでのいう作図とは直感的には以下の操作を言う。

—— 直感的な作図 ——

与えられた二つの点に対し

1. 2 つの点を結ぶ直線を引く
 2. 一方の点を中心として、2 点を結ぶ線分の長さを半径に持つ円を引く
- 引いた直線同士、円同士、円と直線の交点を打つ。

数学的には次の様に定義できる。与えられた二つの点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対し、直線の方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

で与えられる。 $(x_2 - x_1 \neq 0)$ となるように適当に座標系を変えておく。)

また、同様に円の方程式は

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

となる。

作図で新たな点を得るというのは異なる 2 つの点の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)$ からえら得る二つの図形 (直線と円) の交点を得ることに他ならない。

4 ギリシア三大作図問題再考

ギリシア三大作図問題は次の様に言い換えられる。

円積問題

辺の長さが 1 の正方形が書いてある時に、長さ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ の線分を作図する。

立方倍積問題

辺の長さが 1 の立方体が書いてある時に、長さ $\sqrt[3]{2}$ の線分を作図する。

角三等分問題

一端を共有する長さ 1 の 2 つの線分 A,B が書いてある時に、なす角度を θ とすると、任意の θ に対し長さ $\cos \frac{\theta}{3}$ の一端を共有する線分で A と平行な線分を作図する。

5 体としての性質

目標としては、これらの作図が不可能であることを、線分の長さのみに注目して証明する。

長さ 1 の線分が与えられていると円を繰り返し作ること、その自然数倍の長さの線分が全て作図可能である。

さらに、適当に比を作ること、有理数の長さを持つ全ての線分が作図可能である。

したがって、長さ 1 の線分が与えられていると有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の要素は全て作図可能である。

作図によって得られる線分の全ての長さの集合を便宜上 $\mathbb{G}$ とすると

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{G}$$

以上の事を数学的に整備していく。長さ a, b の 2 つの線分 A,B から、作図によって、長さ c の線分 C を作図することを写像によって

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: (a, b) \mapsto c$$

と表現する。

長さ a, b の二つの線分から長さ $a+b$ の線分を得る写像を $+: (a, b) \mapsto a+b$ とする。同様に $-, *, /$ を定義する。

負の長さとはなんじゃらほいという問題が出てくるが、これは、 x, y 平面で $y > 0$ なら r は正 $y < 0$ なら r は負とか定義しておけば良い。

ところで、気になるのは

$$\mathbb{Q} = \mathbb{G}$$

となるかということだが、これは明らかに違う。

なぜならば、長さ 1 の線分から長さ $\sqrt{2}, \sqrt{3} \dots \notin \mathbb{Q}$ の線分が作図可能。

より一般に $\alpha \in \mathbb{G}$ ならば、 $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{G}$ が作図可能

まあ、少なくとも $+, -, *, /$ に対して $\mathbb{Q}$ は”閉じている”。

この様な性質を体をなすという。

体

ある集合 A が二つの演算 $+: (A, A) \rightarrow A, *(A, A) \rightarrow A$ があり、以下の性質を満たすとき、 $(A, +, *)$ が体をなすという。

1. $+$ の性質

1a. $\forall a, b \in A : a + b \in A$

1b. $\forall a, b, c \in A : (a + b) + c = a + (b + c)$

1c. $\exists 0 \in A, \forall a \in A : a + 0 = a$

1d. $\forall a \in A, \exists -a \in A : a + (-a) = 0$

2. $*$ の性質

2a. $\forall a, b \in A : a * b \in A$

2b. $\forall a, b, c \in A : (a * b) * c = a * (b * c)$

2c. $\exists 1 \in A, \forall a \in A : 1 * a = a$

2c. $\forall a \neq 0 \in A, \exists \frac{1}{a} \in A : a * \frac{1}{a} = 1$

3. 分配法則 $\forall a, b, c \in A : (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

$-$ や $/$ は $a - b = a + (-b)$ や $a/b = a * \frac{1}{b}$ 等で定義される。

有理数 $\mathbb{Q}$ は作図で定義される写像 $+, *$ に対し、体の意味で閉じている。

ところで、作図で定義できる写像はそれだけでなく上に述べたようにある長さに平方根をつけることなどができる。

これは、もともと作図が円と円や円と直線の交点でえら得るを考えれば分かる。

以上から作図とは次の様にまとめることができる。

作図

作図とは、2つの長さ a, b から $a+b, a-b, a*b, a/b, \sqrt{a}$ の長さの線分を得ること

そこで平方根を取るという操作を次の用に定式化する。

二次拡大体

部分体 $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ および $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し

$$\mathbb{K}(\sqrt{\alpha}) = \{a + b\sqrt{\alpha} | a, b \in \mathbb{K}\}$$

を二次拡大体という。

部分体とは、体の部分集合で、体の演算についてそれ自身閉じている集合と演算

もし $\mathbb{K} \subset \mathbb{G}$ ならば $\mathbb{K}(\sqrt{\alpha}) \subset \mathbb{G}$ は明らか。

つまり、作図可能な長さの平方根を足したり掛けたりしたものも作図可能。

さらに、作図可能な数は次の様な性質を持っている。

—— 作図可能な長さ ——

ある数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が作図可能ならば、

$\exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_j \in \mathbb{K}_j (j = 0 \dots n-1), \quad \mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}, \mathbb{K}_{j+1} = \mathbb{K}_j(\sqrt{\alpha_j}) (j = 0 \dots n-1)$

つまり、

$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$

なる $\mathbb{K}_j$ が取れ、 $\alpha \in \mathbb{K}_n$

注: $\alpha = * + * \sqrt{\alpha_{n-1}} (* + * \sqrt{\dots})$ と見ると分かりやすい。

となり、作図可能な長さの持つ性質が分かる。

さらに、この様にして作られる**累二次拡大体**にはその空間に著しい性質がある。

6 体の拡大次数

体 $\mathbb{K}$ とその拡大体 $\mathbb{L}$ (あるいは体 $\mathbb{L}$ とその部分体 $\mathbb{K}$) の間には面白い性質がある。

なんと $\mathbb{L}$ は $\mathbb{K}$ をスカラーとするようなベクトル空間と見ることができる。

—— ベクトル空間 ——

体 K 上のベクトル空間 V とは和 $+: (V, V) \rightarrow V$ とスカラー倍 $(K, V) \rightarrow V$ について次を満たすもの。

1. $+$ について可換群となる。

2. $*$ について

2a. $\forall c, d \in K, a \in V : c(d(a)) = (cd)(a)$

2b. $\exists 1 \in K \forall a \in V 1(a) = a$

3. 分配法則 $\forall a, b \in V, c, d \in K : (c+d)a = (ca) + (da), c(a+b) = (ca) + (cb)$

詳細は一般線形代数を参照すると良いが、ベクトル空間には、**基底**と呼ばれる特別な関係にある要素の組と、一度に取ることのできる基底の数を表す特別な数、ベクトル空間の次元がある。

体 $\mathbb{K}$ の拡大体 $\mathbb{L}$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる。

—— 拡大体のベクトル空間 ——

体 $\mathbb{K}$ の拡大体 $\mathbb{L}$ は体の和としてベクトル空間の和を定義し、 $\mathbb{L}$ の体の積を $\mathbb{K}$ に制限したものとしてベクトル空間のスカラー倍を持つ。

ベクトル空間としての $\mathbb{L}$ の次元を**拡大次数**といい、

$$[\mathbb{L}, \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$$

と書く。

この辺りの考え方は慣れないと難しいかもしれないが、言っていることは簡単で、例えば $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は一般に $a, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2}$ と書けが、これを $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみると $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ に

対し

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$$
$$a_1(a_2 + b_2\sqrt{2}) = a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2}$$

となるが、これは基底を $e_1 = 1, e_2 = \sqrt{2}$ として

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$
$$a_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_1b_2 \end{pmatrix}$$

として見る事が出来るという意味。

二次拡大体というのは、ベクトル空間の次元が二次という意味である。

実際 $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ に対し $1, \sqrt{\alpha}$ が基底の一例となることはすぐに証明できる。

二次拡大体の拡大次数

$\mathbb{K} \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し $\mathbb{K}(\sqrt{\alpha})$ の拡大次数は次の様になる。

$$[\mathbb{K}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{K}] = 2$$

さらに、累二次拡大体のベクトル空間としての性質として極めて強力な次の定理がある。

累二次拡大体の拡大次数の連鎖律

部分体の系列 $\mathbb{K} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ に対し

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{M}][\mathbb{M} : \mathbb{K}]$$

証明:

$[\mathbb{L} : \mathbb{M}] = m, [\mathbb{M} : \mathbb{K}] = n$ とする。

$\mathbb{L}$ の $\mathbb{M}$ 上の基底を $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathbb{L}$

$\mathbb{M}$ の $\mathbb{K}$ 上の基底を $\{\beta_1, \dots, \beta_n\} \in \mathbb{M}$

とすると、 $\{\alpha_i\beta_j\}_{i \in [1,m], j \in [1,n]}$ は $\mathbb{K}$ 上一次独立となる。

なぜならば $c_{i,j} \in \mathbb{K}$ に対し

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_{i,j} \alpha_i \beta_j = 0 &\Rightarrow \sum_j \left(\sum_i c_{i,j} \beta_j \right) \alpha_i = 0 \\ &\Rightarrow \sum c_{i,j} \beta_j = 0 \\ &\Rightarrow c_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

ただし、2 行目から 3 行目では α_i の $\mathbb{M}$ 上一次独立性を用い 3 行目から 4 行目では β_j の $\mathbb{K}$ 上的一次独立性を用いた。

証明終了

この定理から次の事が分かる。

累二次拡大体 $\mathbb{K}$ が次の様に得られる時

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n = \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$$

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2^n$$

これと、次の定理から立方倍積問題をすぐに否定的に解決できる。

$\alpha = \sqrt[3]{2}$ に対し、 $\mathbb{Q}(\alpha)$ は α を含む最小の体で

基底は $1, \alpha, \alpha^2$ で

$$\mathbb{Q} = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

となる。

基底となることを確認するだけなので、証明は練習問題で。

これより、 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ を含む体の $\mathbb{Q}$ に対する拡大次数は 3 の倍数となるが、累二次拡大体の拡大次数は 3 の倍数ではないので、 α は作図不可能。

また、角の三等分問題も、 $\cos \frac{\theta}{3}$ が累二次拡大体では得られない様な角度が存在するので (例えば 20 度) 一般には三等分する方法はない。(三等分できる角度もある)

最後に円積問題だけが残った。

7 円積問題

立方倍積問題と角三等分問題はフランスの数学者 Pierre Wantzel によって 1837 年に解かれた。
M. L. Wantzel (1837). "Recherches sur les moyens de reconnaître si un Probleme de Geometrie peut se resoudre avec la regle et le compas". Journal de Mathematiques Pures et Appliquees 1 (2): 366-372.

一方円積問題はドイツの数学者 Carl Louis Ferdinand von Lindemann によって、1882 年に、 π の超越性を示すことによって解かれた。

Lindemann, F. "Über die Zahl π ", Mathematische Annalen 20 (1882): pp. 213-225.

円周率の超越性の研究には、代数多項式環の知識が必要だが、それほど大変じゃないので、そのうち紹介したい。

8 疑問点とか

ということで、立方倍問題、角三等分問題の証明。

円積問題については尻切れトンボでした。

一応細くしておく、当然だけど、今回の”作図”の意味を超えた範囲では作図可能になる場合がある。

逆に、作図可能を主張している証明法は必ず今回の作図の範囲を超えている。

そのうちガロア理論まで書きたい。(けれど時間がない。)