

経路積分の半古典近似

2012 年 3 月 15 日

1 イントロ

経路積分での確率振幅の計算の評価法の一つとして半古典近似がある。
その名前の通り $\hbar \rightarrow 0$ の極限を見る。
基本的には鞍点法。これは数学的には摂動の一種だけど、物理では非摂動法と呼ばれる。
物理で摂動って言った時は相互作用の結合定数に摂動をかける場合が多い。
半古典近似では、相互作用には摂動をかけないので、相互作用の項が高次まで入っていると考えられる。

経路積分の停留点は実は古典的な軌道で、そのまわりでの量子ゆらぎの影響がさまざまな物理量に影響を与える様をとらえることができる。

2 経路積分の半古典近似

第一量子化の経路積分でやった通り確率振幅の計算は経路積分で行うことができる。
例えば

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_i \rangle = \int_{q(0)=q_i, q(t)=q_f} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L(q, \dot{q})}$$

であった。
ここで半古典近似 $\frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$ として鞍点法を用いる。ところで、

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

として、

$$S[q] = \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} m \dot{q}(t')^2 - V(q(t')) \right)$$

の停留点を求める。

$$\begin{aligned}
\forall t'' \in (0, t) \frac{\delta S[q]}{\delta q(t'')} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (S[q + \varepsilon \delta_{t''}] - S[q]) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} m (\dot{q}(t') + \varepsilon \dot{\delta}(t' - t''))^2 - V(q(t') + \varepsilon \delta(t' - t'')) \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} m \dot{q}(t')^2 - V(q(t')) \right) \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^t dt' \left(m \varepsilon \dot{q}(t') \dot{\delta}(t' - t'') - \varepsilon \dot{V}(q(t')) \delta(t' - t'') \right) \right] \\
&= \int_0^t dt' \left(-m \ddot{q}(t') \delta(t' - t'') - \dot{V}(q(t')) \delta(t' - t'') \right) \\
&= -m \ddot{q}(t'') - V'(q(t'')) = 0
\end{aligned}$$

より、停留点は $m\ddot{q} = -\dot{V}(q)$ を満たす古典解

そこで、停留点の事を q_{cl} と書くことにする。

さらに二階微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t'') \delta q(t''')} \Big|_{q=q_{cl}} &= \lim_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left(S[q + \varepsilon_1 \delta_{t''} + \varepsilon_2 \delta_{t'''}] - S[q + \varepsilon_1 \delta_{t''}] - S[q + \varepsilon_2 \delta_{t'''}] + S[q] \right) \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_0^t dt' \left[\frac{1}{2} m \left((\dot{q}(t') + \varepsilon_1 \dot{\delta}(t' - t'') + \varepsilon_2 \dot{\delta}(t' - t'''))^2 - (\dot{q}(t') + \varepsilon_1 \dot{\delta}(t' - t''))^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\dot{q}(t') + \varepsilon_2 \dot{\delta}(t' - t'''))^2 + (\dot{q}(t'))^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(V(q(t') + \varepsilon_1 \delta(t' - t'') + \varepsilon_2 \delta(t' - t''')) - V(q(t') + \varepsilon_1 \delta(t' - t'')) - V(q(t') + \varepsilon_2 \delta(t' - t''')) + V(q(t')) \right) \right] \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_0^t dt' \left[m \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{\delta}(t' - t'') \dot{\delta}(t' - t''') - \varepsilon_1 \varepsilon_2 V''(q(t')) \delta(t' - t'') \delta(t' - t''') \right] \\
&= \int_0^t dt' (m \dot{\delta}(t' - t'') \dot{\delta}(t' - t''') - V''(q(t')) \delta(t' - t'') \delta(t' - t'''))
\end{aligned}$$

となる。

ここで

$$S[q] = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \int dt'' \int dt''' (q - q_{cl})(t'') \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t'') \delta q(t''')} \Big|_{q=q_{cl}} (q - q_{cl})(t''') + \dots$$

と展開すると第二項は $r = q - q_{cl}$ として

$$\begin{aligned}
&\int dt'' \int dt''' r(t'') \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t'') \delta q(t''')} \Big|_{q=q_{cl}} r(t''') \\
&= \int dt'' \int dt''' r(t'') \int_0^t dt' (m \dot{\delta}(t' - t'') \dot{\delta}(t' - t''') - V''(q(t')) \delta(t' - t'') \delta(t' - t''')) r(t''') \\
&= - \int_0^t dt' r(t') (m \partial_{t'}^2 + V''(q_{cl}(t'))) r(t')
\end{aligned}$$

$$\text{ただし、} V''(q) = \frac{\partial^2 V(q)}{\partial q^2}$$

以上より

$$S[q] = S[q_{cl}] - \frac{1}{2} \int_0^t dt' r(t') (m \partial_{t'}^2 + V''(q_{cl}(t'))) r(t') + \dots$$

以上で鞍点法を用いる準備はできた。

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_i \rangle = K e^{\frac{i}{\hbar} S(q_{cl})} (\det(-m(\partial_t^2 + V''(q_{cl}))))^{-1/2}$$

i や 2π 等は K の中に入れてある。

正值性の確認には $-m(\partial_t^2 + V''(q_{cl}))$ の固有値を求める必要があるが、その時かかる関数 $r(t)$ は $r(0) = r(t) = 0$ の境界条件で固有値を求める。

3 疑問点とか

ということで経路積分の半古典近似でした。

この描像だと古典解の周りで量子振動の影響がでていているというのが見やすい。