

鞍点法

2012 年 3 月 15 日

1 イントロ

経路積分で強力な非摂動近似となる鞍点法を紹介する。

英語では saddle point approximation とか stationary phase approximation とか言う。

ここでは、実関数、複素関数、汎関数の鞍点法を紹介。

例として stirling の公式を導出した。

2 実関数の鞍点法

$$I(k) = \int dx e^{kF(x)}$$

の積分を評価する。

$F(x)$ の極大値が $x = x_0$ で与えられるとすると

$$\int dx e^{k(F(x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2) + \mathcal{O}(k(x-x_0)^3)} = e^{kF(x_0)} \int dx e^{\frac{-k|F''(x_0)|}{2}(x-x_0)^2} + \mathcal{O}(e^{k(x-x_0)^3})$$

となる。

k が十分大きい極限では、 $x = x_0$ のみで値を持つ。

したがって、 k が十分大きい極限では、極大点のみが影響する。

積分範囲の中に入っている極大点を与える点を x_i とすると積分範囲を $(-\infty, \infty)$ に広げて

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I(k) = \sum_i e^{kF(x_i)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-k|F''(x_i)|}{2}(x-x_i)^2}$$

となるので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int dx e^{kF(x)} = \sum_i e^{kF(x_i)} \sqrt{\frac{2\pi}{k|F''(x_i)|}}$$

3 複素関数の鞍点法

複素関数では、経路に沿った変化を見るので、極大点とかは経路によって見方が変わる。
ある経路 C での複素積分

$$I(k) = \int_C dz e^{kF(z)}$$

とする。

$$F(z) = u(z) + iv(z)$$

とする。

ここで $F(z)$ を $z = z_0$ の周りで展開する。

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}F''(z_0)(z - z_0)^2 + \mathcal{O}((z - z_0)^3)$$

ここで $z - z_0 = re^{i\theta}$, $F'(z_0) = |F'(z_0)|e^{i\alpha}$, $F''(z_0) = |F''(z_0)|e^{i\beta}$ と変数変換する。
すると

$$F(z) = F(z_0) + r|F'(z_0)|e^{i(\theta+\alpha)} + \frac{r^2|F''(z_0)|}{2}e^{i(2\theta+\beta)} + \mathcal{O}(r^3)$$

より

$$u(z) = u(z_0) + r|F'(z_0)|\cos(\theta + \alpha) + \frac{r^2|F''(z_0)|}{2}\cos(2\theta + \beta) + \mathcal{O}(r^3)$$

$$v(z) = v(z_0) + r|F'(z_0)|\sin(\theta + \alpha) + \frac{r^2|F''(z_0)|}{2}\sin(2\theta + \beta) + \mathcal{O}(r^3)$$

$z = z_0$ が停留点で $F'(z_0) = 0$ となると

$$u(z) = u(z_0) + \frac{r^2|F''(z_0)|}{2}\cos(2\theta + \beta) + \mathcal{O}(r^3)$$

$$v(z) = v(z_0) + \frac{r^2|F''(z_0)|}{2}\sin(2\theta + \beta) + \mathcal{O}(r^3)$$

全ての停留点において $\cos(2\theta + \beta) = -1 \Leftrightarrow 2\theta + \beta = \pi$ となるように経路を取りなおすと (θ は経路に依存する。)

$$u(z) = u(z_0) - \frac{r^2|F''(z_0)|}{2} + \mathcal{O}(r^3)$$

$$v(z) = v(z_0) + \mathcal{O}(r^3)$$

この展開の元で、経路を $C = C_1 + C_2 + C_3$ とわけ、 C_2 を微小な経路で $z = z_0$ を含むとすると、

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_C dz e^{kF(z)} \\ &= \int_{C_1+C_3} dz e^{kF(z)} + \int_{C_2} dz e^{kF(z)} \\ &= \int_{C_1+C_3} dz e^{kF(z)} + 2 \int_0^\varepsilon dr e^{i\theta} e^{kF(z)} \\ &= \int_{C_1+C_3} dz e^{kF(z)} + e^{i\frac{\pi-\beta}{2}} e^{kF(z_0)} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon dr e^{-\frac{kr^2|F''(z_0)|}{2}} \end{aligned}$$

k が十分大きい領域では第二項は $r = 0$ 付近でのみ値が定まるので

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} I(k) &= \int_{C_1+C_3} dz e^{kF(z)} + e^{i\frac{\pi-\beta}{2}} e^{kF(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-\frac{kr^2|F''(z_0)|}{2}} \\ &= \int_{C_1+C_3} dz e^{kF(z)} + e^{i\frac{\pi-\beta}{2}} e^{kF(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{k|F''(z_0)|}}\end{aligned}$$

同様な事を全ての停留点について行い、停留点の近傍は指数の肩に大きい数 k が乗っているの、この項が支配的となると、停留点を $z = z_i$ とすると

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} I(k) &= \sum_{z_i} e^{i\frac{\pi-\beta_i}{2} + kF(z_i)} \sqrt{\frac{2\pi}{k|F''(z_i)|}} \\ \beta_i &= \text{Arg}(F''(z_i))\end{aligned}$$

4 汎関数の鞍点法

$$I(k) = \int Dx e^{-kF[x]}$$

を評価する。

汎関数の停留点とは

$$\forall t : \frac{\delta F[x]}{\delta x(t)} = 0$$

を満たす関数 $\bar{x}(t)$ のこと。

停留点 $x(t) = \bar{x}(t)$ の周りで汎関数を展開すると

$$\begin{aligned}F[x] &= F[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int dt \int dt' (x - \bar{x})(t) A(t, t') (x - \bar{x})(t') + \dots \\ A(t, t') &= \left. \frac{\delta^2 F[x]}{\delta x(t) \delta x(t')} \right|_{x=\bar{x}}\end{aligned}$$

となる。

停留点を $\bar{x}_i$ として、汎関数ガウス積分すれば規格化定数を K として

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} &= K \sum_{\bar{x}_i} e^{-F[\bar{x}_i]} \det\left(\frac{\hat{A}_i}{2\pi}\right)^{-1/2} \\ A_i(t, t') &= \left. \frac{\delta^2 F[x]}{\delta x(t) \delta x(t')} \right|_{x=\bar{x}_i}\end{aligned}$$

あとあと便利な様に 2π を規格化定数から出しておいた。

5 例:Stirling の公式

スターリングの公式とは

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &\approx \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \\ n! &\approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\end{aligned}$$

これを鞍点法により導く。

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty dx x^z e^{-x} \\ &= \int_0^\infty dx e^{-x+z \ln x} \\ &= \int_0^\infty dx e^{zF(x)}\end{aligned}$$

とすると、

$$F(x) = \ln x - \frac{x}{z}$$

この停留点は

$$F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$$

より $x = z$ で、

$$F''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

より $x = z$ は極大値で、他に極値を持たないので、鞍点法により $F(z) = \ln z - 1$, $F''(z) = -\frac{1}{z^2}$ を用いて

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &\approx e^{zF(z)} \sqrt{\frac{2\pi}{z|F''(z)|}} \\ &= e^{z(\ln z - 1)} \sqrt{2\pi z}\end{aligned}$$

以上より

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z$$

6 疑問点とか

鞍点法は、積分の値（グローバルな情報）を停留点（ローカルな情報）によって推測する強力な近似法。

経路積分の非摂動近似法の一つ半古典近似とは汎関数の鞍点法のこと。

今回もちいたパラメーター k を $\frac{1}{\hbar}$ とすると、経路積分のパラメーターとなって、半古典近似が見やすい。

後は、特殊関数の漸近形を見るのとかに良く使う。

Airy 関数とかね。