

いろいろなガウス積分

2012 年 3 月 15 日

1 イントロ

経路積分の摂動法で信じられない威力を発揮するガウス積分についてまとめた。
実数、複素数、汎関数上についてまとめてある。

2 実数上のガウス積分

2.1 一次元

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}, \operatorname{Re} a > 0$$

を実数 1 次元のガウス積分という。

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)} \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-ar^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \operatorname{Re} a > 0$$

2.2 N 次元

N 次正方値対称行列 A に対し

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}$$

を求める。

A は対称行列なので対角化できてある直交行列 O と、対角行列 D が存在して

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}^T \mathbf{D} \mathbf{O}$$

となり、A の正値性から、固有値はすべて正なので、D の対角成分はすべて正
 $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{O}\mathbf{v}$ と変数変換すれば、 $\det \mathbf{O} = 1$ なので

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}} &= \int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v}} \\ &= \prod_{n=1}^N \int dv_n e^{-\frac{1}{2}d_n v_n^2} \\ &= \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{d_n}}\end{aligned}$$

ここで $\det \mathbf{A} = \prod_{n=1}^N d_n$ より

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}} = (2\pi)^{N/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2}$$

2.3 一次項があるガウス積分

求めたいのは

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{j}^T \mathbf{v}}$$

ここで $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{j}$ と変数変換すると

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{j}^T \mathbf{v}} = \int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{j}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{j}}$$

したがって

$$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{j}^T \mathbf{v}} = (2\pi)^{N/2} (\det \mathbf{A})^{-1/2} e^{\frac{1}{2}\mathbf{j}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{j}}$$

2.4 Wick の定理

ガウス分布の元での期待値を

$$\langle X \rangle = (2\pi)^{-N/2} (\det \mathbf{A})^{1/2} \int d\mathbf{v} X e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}$$

とした時

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2n}} \rangle$$

を求める。

$\int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{j}^T \mathbf{v}}$ を j_{i_1}, j_{i_2} で偏微分して $\mathbf{j} = 0$ とすると

$$\partial_{j_{i_2}} \partial_{j_{i_1}} \int d\mathbf{v} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{j}^T \mathbf{v}} = \int d\mathbf{v} v_{i_1} v_{i_2} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}$$

なので $(2\pi)^{N/2}(\det A)^{-1/2}e^{\frac{1}{2}J^T A^{-1}j}$ に対して同じ操作をして

$$\partial_{j_{i_2}} \partial_{j_{i_1}} (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2}J^T A^{-1}j} = (A^{-1})_{i_1 i_2} (2\pi)^{N/2} (\det A)^{-1/2}$$

を得る。

この結果を一般化すれば

$$\langle v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_{2n}} \rangle = \sum_{\text{all pairings of } \{i_1, \dots, i_{2n}\}} (A^{-1})_{i_{k_1} i_{k_2}} \dots (A^{-1})_{i_{k_{2n-1}} i_{k_{2n}}}$$

3 複素数上のガウス積分

3.1 1次元

$$\int d(\bar{z}, z) e^{-\bar{z} w z} \quad \operatorname{Re} w > 0$$

を求める。

$$\begin{aligned} \int d(\bar{z}, z) e^{-\bar{z} w z} &= \int dx dy e^{-(x-iy)w(x+iy)} \\ &= \int dx dy e^{-wx^2 - wy^2} \end{aligned}$$

より、実数のガウス積分を用いて

$$\int d(\bar{z}, z) e^{-\bar{z} w z} = \frac{\pi}{w} \quad \operatorname{Re} w > 0$$

3.2 N次元

A を N 次正定エルミート行列として

$$\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v}$$

を求める。

実数と同じ場合の様にエルミート行列は対角化できるので

$$\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v} = \pi^N (\det A)^{-1}$$

を得る。

3.3 一次項がある場合

$$\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + w^\dagger v + v^\dagger w'}$$

を求める。

$$v \rightarrow v + w'$$

$$v^\dagger \rightarrow v^\dagger + w^\dagger$$

と変数変換する。

注: v と v' は独立に変数変換できる

不安だったらいったん $x + iy$ の形に直して $x + iy \rightarrow \dots$ などと変換してみれば分かる。

$$\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + w^\dagger v + v^\dagger w'} = \int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + e^{w^\dagger A^{-1}} w'}$$

なので

$$\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + w^\dagger v + v^\dagger w'} = \pi^N (\det A)^{-1} e^{w^\dagger A^{-1} w'}$$

3.4 Wick の定理

$$\langle \bar{v}_{i_1} \dots \bar{v}_{i_n} v_{j_1} \dots v_{j_n} \rangle$$

を求める。

実数の場合と同じように $\partial_{\bar{w}_{i_1}} \partial_{w_{j_1}}$ を $\int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + w^\dagger v + v^\dagger w'}$ に作用させて $w = w' = 0$ とすると

$$\partial_{\bar{w}_{i_1}} \partial_{w_{j_1}} \int d(v^\dagger, v) e^{-v^\dagger A v + w^\dagger v + v^\dagger w'} = \int d(v^\dagger, v) \bar{v}_{i_1} v_{j_1} e^{-v^\dagger A v}$$

また

$$\partial_{\bar{w}_{i_1}} \partial_{w_{j_1}} \pi^N (\det A)^{-1} e^{w^\dagger A^{-1} w'} = \pi^N (\det A)^{-1} (A^{-1})_{j_1 i_1}$$

これを一般化すれば

$$\langle \bar{v}_{i_1} \dots \bar{v}_{i_n} v_{j_1} \dots v_{j_n} \rangle = \sum_{P \in \mathcal{S}_n} (A^{-1})_{j_1 i_{P_1}} \dots (A^{-1})_{j_n i_{P_n}}$$

ただし、 $\mathcal{S}_n$ は n 次の置換群

4 可換体上の汎関数ガウス積分

N 次元の場合を無限大に飛ばせば

$$\begin{aligned} & \int Dv \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx dx' v(x) A(x, x') v(x') + \int dx j(x) v(x) \right] \\ &= K (\det A)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \int dx dx' j(x) A^{-1}(x, x') j(x') \right] \end{aligned}$$

ただし、 K は規格化定数

また、 $A^{-1}(x, x')$ は Green 関数で

$$\int dx' A(x, x') A^{-1}(x', x'') = \delta(x - x'')$$

これを用いれば Wick の定理は

$$\langle v(x_1) \dots v(x_{2n}) \rangle = \sum_{\text{all pairings of } \{x_1, \dots, x_{2n}\}} A^{-1}(x_{k_1}, x_{k_2}) \dots A^{-1}(x_{k_{2n-1}}, x_{k_{2n}})$$

5 疑問点とか

汎関数の場合はやっぱりごまかしてるな・・・なんとかならんもんか。