the path integral

2012 年 3 月 14 日

1 イントロ

正準交換関係を用いた演算子法とは違うもう一つの量子力学の定式化の方法、Feynman の the path integral 経路積分法を一体問題についてまとめた。

2 the path integral

次の遷移確率振幅を求める。

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_i \rangle$$

時間を N 個に分割し、$\Delta t = t/N$ とすると

$$\langle q_f | (e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar})^N | q_i \rangle$$

Δt が十分小さければ $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ として

$$\begin{aligned} e^{-\hat{H}\Delta t\hbar} &= (1 - i(\hat{T} + \hat{V})\Delta t/\hbar) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= (1 - i\hat{T}\Delta t/\hbar)(1 - i\hat{V}\Delta t/\hbar) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= e^{-i\hat{T}\Delta t\hbar} e^{-i\hat{V}\Delta t\hbar} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

ここで次の恒等演算子をはさむ

$$id = \int \mathrm{d}q_n \mathrm{d}p_n \, |q_n\rangle \, \langle q_n | p_n \rangle \, \langle p_n|$$

すると

$$
\begin{aligned}
\langle q_f|(e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar})^N|q_i\rangle &= \langle q_f|\int \mathrm{d}q_N\mathrm{d}p_N\,|q_N\rangle\langle q_N|p_N\rangle\langle p_N|\,e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar}e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar}\\
&\quad\times\int \mathrm{d}q_{N-1}\mathrm{d}p_{N-1}\,|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}|\,e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar}e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar}\\
&\quad\times\dots\\
&\quad\times\int \mathrm{d}q_1\mathrm{d}p_1\,|q_1\rangle\langle q_1|p_1\rangle\langle p_1|\,e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar}e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar}\,|q_i\rangle\\
&= \int\prod_{n=1}^{N}\mathrm{d}q_n\mathrm{d}p_n\,\langle q_f|q_N\rangle\prod_{n=1}^{N}\langle q_n|p_n\rangle\langle p_n|e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar}e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar}|q_{n-1}\rangle\ s\,t\,.q_0=q_i\\
&= \int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\prod_{n=1}^{N}\mathrm{d}p_n\prod_{n=1}^{N}\frac{e^{i\frac{q_np_n}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-iT(p_n)\Delta t/\hbar}\langle p_n|q_{n-1}\rangle\,e^{-iV(q_{n-1})\Delta t/\hbar}\,s\,t\,.q_f=q_N\\
&= \int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\prod_{n=1}^{N}\mathrm{d}p_n\prod_{n=1}^{N}\frac{e^{i\frac{(q_n-q_{n-1})p_n}{\hbar}}}{2\pi\hbar}e^{-iT(p_n)\Delta t/\hbar}e^{-iV(q_{n-1})\Delta t/\hbar}\\
&= \int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\prod_{n=1}^{N}\mathrm{d}\frac{p_n}{2\pi\hbar}\exp\Bigg(-i\frac{\Delta t}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\big(V(q_n)+T(p_{n+1})-p_{n+1}\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t})\Bigg)
\end{aligned}
$$

$N\to\infty$,$\Delta t\to 0$ の極限では

$$
\begin{aligned}
\Delta t\sum_{n=0}^{N-1} &\to \int_0^t \mathrm{d}t'\\
\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t} &\to \partial_{t'}q|_{t'=t_n}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\mathrm{d}q_n\prod_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p_n}{2\pi\hbar}=\int \mathrm{D}q
$$

として

$$
\begin{aligned}
\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle &= \int_{q(0)=q_i,q(t)=q_f}\mathrm{D}q\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'(p\dot{q}-H(p,q))\right]\\
&= \int_{q(0)=q_i,q(t)=q_f}\mathrm{D}q\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'L(q,\dot{q})\right]
\end{aligned}
$$

とハミルトン形式とラグランジアン形式での一体問題の経路積分が求まった。
各点各点の積分演算子の極限が作用素空間上の積分演算子に一致するというのは数学的に怪しいが、それさえ認めれば割と厳密?

3　疑問点とか

数学的な話は置いといて（そのうちこういった数学的に細かな所がクリティカルに聞いてくるかもしれないが)、基本的には固有状態で展開しまくれば良い。
今回の場合は $\hat{T}$ が $\hat{p}$ て対角化できて、$\hat{V}$ が $\hat{q}$ で対角化できるとした。
経路積分法の良いところは、非摂動的な近似が簡単な所とか、いろんな計算に対して物理的な解釈をつけやすいというところがある。